

S10

S103L

Trần Phương (Hà Nội)

Nguyễn Đức Tấn (TP. Hồ Chí Minh)

SAI LẦM THƯỜNG GẶP & CÁC SÁNG TẠO KHI GIẢI TOÁN

(Tái bản có chỉnh lí, bổ sung)

- Sai lầm trong Đại số, Giải tích, Hình học
- Kỹ thuật chọn điểm rơi bất đẳng thức Côsi (AM-GM), Bunhiacôpski, Becnuli
- 15 đề thi tuyển sinh vào Đại học, 30 đề thi tự luyện ôn thi Đại học

Nhà sách KHANG VIỆT

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

ĐVL '12831' 13



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

136 Xuân Thủy - Cầu Giấy - Hà Nội

Điện thoại : (04) 37547735 - Fax: (04) 37547911

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc :

ĐINH NGỌC BẢO

Tổng biên tập :

ĐINH VĂN VANG

Chịu trách nhiệm nội dung và bản quyền:

Công ty TNHH MTV DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Biên tập nội dung:

NGUYỄN NĂNG HÙNG

Kỹ thuật vi tính:

Công ty KHANG VIỆT

Trình bày bìa:

Công ty KHANG VIỆT

Tổng phát hành



**CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT**

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P. Đa Kao - Q.1 - TP.HCM

Điện thoại: 08. 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968

Fax: 08. 3911 0880

Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

Website: www.nhasachkhangviet.vn

SAI LẦM THƯỜNG GẶP & CÁC SÁNG TẠO KHÍ GIẢI TOÁN (Tái bản)

Mã số : 02.02.694/1001.PT2013

In 2000 bản, khổ 16x24cm Tại: **Cty TNHH MTV IN ẤN MAI THỊNH ĐỨC**

Địa chỉ: 71, Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Q. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh

Số đăng ký KHXB: 74-2013/CXB/694-84/ĐHSP ngày 14/01/2013

Quyết định XB số: 38/QĐ-ĐHSP, do NXB Đại học Sư Phạm cấp 28/01/2013

In xong và nộp lưu chiểu Quý I năm 2013

LỜI NÓI ĐẦU

“Sai lầm thường gặp” là cụm từ lần đầu tiên được xuất hiện trong cuốn sách **“Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức”** của tác giả do NXB TP Hồ Chí Minh giới thiệu năm 1993. Tiếp theo cụm từ này được xuất hiện trong phần mở đầu cuốn sách **“Phương pháp mới giải đề thi tuyển sinh Đại học môn Toán”** của tác giả được các NXB Giáo dục (1995); NXB TP Hồ Chí Minh (1998). Từ khi cuốn sách **“Sai lầm thường gặp và các sáng tạo khi giải Toán”** được xuất hiện đầu tiên vào tháng 2 năm 2004 cho đến nay, tác giả đã nhận được rất nhiều thư từ mọi miền đất nước hoan nghênh và góp ý kiến cho nội dung cuốn sách. Tác giả chân thành cảm ơn sự quan tâm của bạn đọc, đồng thời tác giả mong bạn đọc thứ lỗi đã không hồi âm được cho nhiều người vì điều kiện thời gian hạn hẹp.

Cuốn sách này là sự kết hợp các dạng sai lầm mà học sinh dễ mắc phải khi làm toán phổ thông. Vì quá trình nhận thức của con người đi từ: **“Cái sai đến cái gần đúng rồi mới đến khái niệm đúng”** nên các bài toán được trình bày theo bố cục:

“Sai lầm thường gặp – Nguyên nhân sai lầm – Lời giải đúng – Bình luận”

Ngoài ra, để giúp các bạn giáo viên đồng nghiệp có thể giảng dạy tốt về bất đẳng thức, tác giả giới thiệu rất tỉ mỉ **“Kỹ thuật chọn điểm rơi của bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Bunhiacôpski và bất đẳng thức Bernoulli”** trong phần mở đầu cuốn sách. Đây là phần trích dẫn rất nhỏ trong bản thảo: **“Tuyển tập các phương pháp, chuyên đề và kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức Đại số”** dày 2222 trang mà tác giả sẽ xuất bản trong thời gian tới.

Phần cuối quyển sách giới thiệu đề thi tuyển sinh Đại học toàn quốc cùng với 30 đề thi luyện tập.

Lần tái bản này cuốn sách được tác giả bổ sung chỉnh lý những thiếu sót mà bạn đọc đã góp ý cho lần xuất bản đầu tiên. Dù đã cố gắng chỉnh sửa nhưng cuốn sách vẫn còn có thể có những thiếu sót. Rất mong bạn đọc lượng thứ và đóng góp ý kiến theo địa chỉ: Số 3 Hàng Tre – Hoàn Kiếm – Hà Nội.

Tác giả chân thành cảm ơn nhà giáo Nguyễn Đức Tấn đã đóng góp các bài viết của mình cho cuốn sách này.

Hà Nội

Tác giả: Trần Phương

MỤC LỤC

Chương	Nội dung	Trang
Chương I:	Sai lầm trong chứng minh bất đẳng thức	7
§1.	Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Côsi.....	7
I.	Sai lầm trong đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân	7
II.	Sai lầm trong đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng	22
III.	Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải	28
§2.	Kỹ thuật chọn điểm rơi trong Bunhiacôski	37
§3.	Kĩ thuật chọn điểm rơi tron bất đẳng thức Bernoulli	49
Chương II:	Các sai lầm thường gặp trong giải phương trình và bất phương trình và các hệ	59
§1.	Sai lầm thường gặp trong phương trình	59
§2.	Sai lầm thường gặp trong bất phương trình	115
§3.	Sai lầm thường gặp trong hệ phương trình, hệ bất phương trình ...	147
I.	Sai lầm trong giải hệ phương trình	147
II.	Sai lầm trong giải hệ bất phương trình	155
Chương III:	Các sai lầm và thiếu sót thường gặp khi tính giới hạn hàm số..	165
Chương IV:	Các sai lầm và thiếu sót thường gặp khi khảo sát hàm số.	175
§1.	Sai lầm khi xét tính liên tục tại 1 điểm của hàm số	175
§2.	Sai lầm trong các bài toán đạo hàm	177
§3.	Sai lầm trong các bài toán xét tính đơn điệu.....	181
§4.	Sai lầm trong các bài toán cực trị	185
§5.	Sai lầm trong các bài toán tìm Max, min của hàm số	188
Chương V:	Những quan điểm khác nhau trong các bài toán tiếp xúc, tiếp tuyến và tiệm cận.....	191
§1.	Các định nghĩa và điều kiện tiếp xúc	191
§2.	Các bài tập sử dụng điều kiện nghiệm bội nghiệm kép	202
§3.	Các bài tập tiếp xúc sử dụng điều kiện định nghĩa	205
§4.	Các bài tập về họ đường cong tiếp xúc với đường cố định.....	210
§5.	Tiếp tuyến cố định đi qua cực trị hàm số.....	216
§6.	Tiệm cận của đường cong	217
Chương VI:	Sai lầm trong các bài toán nguyên hàm, tích phân và tổ hợp	231
I.	Sai lầm trong các bài toán nguyên hàm tích phân	231
II.	Sai lầm trong các bài toán tổ hợp.....	236
Chương VII:	Sai lầm trong các bài toán hình học	241
Chương VIII:	Các bài viết chọn lọc của nhà giáo Nguyễn Đức Tấn.....	252
Chương IX:	Lời giải mẫu các đề thi tuyển sinh toàn quốc của BGD & ĐT.....	259
Chương X:	Các đề thi đại học tự luyện	337

CHƯƠNG I: SAI LẦM TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

§1. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

I. SAI LẦM TRONG ĐÁNH GIÁ TỪ TRUNG BÌNH CỘNG SANG TRUNG BÌNH NHÂN

1. Bất đẳng thức Côsi: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \forall a_i \geq 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$

2. Bài toán xuất phát: Cho $a, b > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức Côsi: $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$. Với $a = b$ thì $\text{Min} S = 2$

Nhận xét: Từ bài toán này ta có thể thay đổi miền xác định để có các bài toán sau:

3. Làm quen với điểm rơi trong bất đẳng thức Côsi

Bài 1. Cho $a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{1}{a}$

Bình luận và lời giải

- Sai lầm thường gặp: $S = a + \frac{1}{a} \geq 2 \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \Rightarrow \text{Min} S = 2$
- Nguyên nhân sai lầm: $\text{Min} S = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{a} = 1$ mâu thuẫn với giả thiết $a \geq 3$
- Phân tích và tìm tòi lời giải: Xét bảng biến thiên của $a, \frac{1}{a}$ và S để dự đoán $\text{Min} S$

a	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		30
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{30}$
S	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{7}$	$8\frac{1}{8}$	$9\frac{1}{9}$	$10\frac{1}{10}$	$11\frac{1}{11}$	$12\frac{1}{12}$		$30\frac{1}{30}$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy khi a tăng thì S càng lớn và từ đó dẫn đến dự đoán khi $a = 3$ thì S nhận giá trị nhỏ nhất. Để dễ hiểu và tạo sự ấn tượng ta sẽ nói rằng $\text{Min} S = \frac{10}{3}$ đạt tại "Điểm rơi: $a = 3$ ".

Do bất đẳng thức Côsi xảy ra dấu bằng tại điều kiện các số tham gia phải bằng nhau, nên tại "Điểm rơi: $a = 3$ " ta không thể sử dụng bất đẳng thức Côsi trực tiếp cho 2 số a và $\frac{1}{a}$ vì $3 \neq \frac{1}{3}$. Lúc này ta sẽ giả định sử dụng bất đẳng thức Côsi cho cặp số $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{1}{a}\right)$ sao cho tại "Điểm rơi: $a = 3$ " thì $\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{a}$ tức là ta có lược đồ "Điểm rơi" sau đây:

Sơ đồ:

$$\boxed{a=3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{3}{\alpha} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=9} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

Từ đó ta biến đổi S theo sơ đồ "Điểm rơi" được nêu ở trên.

• **Lời giải đúng:** $S = a + \frac{1}{a} = \left(\frac{a}{9} + \frac{1}{a}\right) + \frac{8a}{9} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{9} \cdot \frac{1}{a}} + \frac{8 \cdot 3}{9} = \frac{10}{3}$

Với $a = 3$ thì $\text{Min } S = \frac{10}{3}$

Bài 2. Cho $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{1}{a^2}$

Bình luận và lời giải

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a=2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=8} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{aligned} S &= a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{7a}{8} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{8} = \frac{2}{\sqrt{8a}} + \frac{7a}{8} \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{8 \cdot 2}} + \frac{7 \cdot 2}{8} = \frac{2}{4} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4}. \text{ Với } a = 2 \text{ thì } \text{Min } S = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Mặc dù ta đã biến đổi S theo điểm rơi $a = 2$ và $\text{Min } S = \frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên đã mắc sai lầm trong việc đánh giá mẫu số:

"Nếu $a \geq 2$ thì $\frac{2}{\sqrt{8a}} \geq \frac{2}{\sqrt{8 \cdot 2}} = \frac{2}{4}$ là đánh giá sai"

Để điều chỉnh lời giải sai thành lời giải đúng ta cần phải biến đổi S sao cho khi sử dụng bất đẳng thức Côsi sẽ khử hết biến số a ở mẫu số.

• **Lời giải đúng:** $S = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{6a}{8} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{8} \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$

Với $a = 2$ thì $\text{Min } S = \frac{9}{4}$

Bài 4. Cho $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + \frac{1}{a^2}$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:** $S = 2a + \frac{1}{a^2} = a + a + \frac{1}{a^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot a \cdot \frac{1}{a^2}} = 3 \Rightarrow \text{Min } S = 3$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$\text{Min } S = 3 \Leftrightarrow a = a = \frac{1}{a^2} = 1$ mâu thuẫn với giả thiết $0 < a \leq \frac{1}{2}$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:** Xét bảng biến thiên để dự đoán Min S

a	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2.a	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{a^2}$	100	81	64	49	36	25	16	9	4
S	$100\frac{1}{5}$	$81\frac{2}{9}$	$64\frac{1}{4}$	$49\frac{2}{7}$	$36\frac{1}{3}$	$25\frac{2}{5}$	$16\frac{1}{2}$	$9\frac{2}{3}$	5

Nhìn bảng biến thiên ta thấy khi a càng tăng thì S càng nhỏ từ đó dẫn đến dự đoán khi $a = \frac{1}{2}$ thì S nhận giá trị nhỏ nhất.

• **Sơ đồ điểm rơi 1:**

$$\boxed{a = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha a^2} = \frac{4}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 8} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Cách 1:** $S = 2a + \frac{1}{a^2} = \left(a + a + \frac{1}{8a^2}\right) + \frac{7}{8a^2}$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot a \cdot \frac{1}{8a^2}} + \frac{7}{8a^2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{8a^2} \geq \frac{3}{2} + \frac{7.4}{8} = 5. \text{ Với } a = \frac{1}{2} \text{ thì Min } S = 5$$

• **Sơ đồ điểm rơi 2:**

$$\boxed{a = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha a = \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{a^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 8} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Cách 2:** $S = 2a + \frac{1}{a^2} = \left(8a + 8a + \frac{1}{a^2}\right) - 14a \geq 3 \sqrt[3]{8a \cdot 8a \cdot \frac{1}{a^2}} - 14a$
 $= 12 - 14a \geq 12 - 14 \cdot \frac{1}{2} = 5$. Với $a = \frac{1}{2}$ thì Min $S = 5$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = ab + \frac{1}{ab}$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:** $S = ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} = 2 \Rightarrow \text{Min } S = 2$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 2 \Leftrightarrow ab = \frac{1}{ab} = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2}: \text{ Vô lý}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Biểu thức của S chứa 2 biến số a, b nhưng nếu đặt $t = ab$ hoặc $t = \frac{1}{ab}$ thì $S = t + \frac{1}{t}$

là biểu thức chứa 1 biến số. Khi đổi biến số ta cần phải tìm miền xác định cho biến số mới, cụ thể là:

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{ab} \Rightarrow ab = \frac{1}{t} \text{ và } t = \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

• **Bài toán trở thành:** Cho $t \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = t + \frac{1}{t}$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{t = 4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} \\ \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 16} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Lời giải tổng hợp:**

$$S = t + \frac{1}{t} = \left(\frac{t}{16} + \frac{1}{t}\right) + \frac{15t}{16} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{t}{16} \cdot \frac{1}{t}} + \frac{15t}{16} = \frac{2}{4} + \frac{15t}{16} \geq \frac{2}{4} + \frac{15 \cdot 4}{16} = \frac{17}{4}$$

$$\text{Với } t = 4 \text{ hay } a = b = \frac{1}{2} \text{ thì Min } S = \frac{17}{4}$$

- **Lời giải thu gọn:** Do $t = 4 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$ nên biến đổi trực tiếp S như sau:

$$S = ab + \frac{1}{ab} = \left(ab + \frac{1}{16ab}\right) + \frac{15}{16ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{1}{16ab}} + \frac{15}{16 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{17}{4}$$

$$\text{Với } a = b = \frac{1}{2} \text{ thì Min } S = \frac{17}{4}$$

Bài 7. Cho $a, b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Bình luận và lời giải

- **Sai lầm thường gặp:** $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} = 2 \Rightarrow \text{Min } S = 2$

- **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = 1 \Rightarrow \sqrt{ab} = a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 1 \geq 2 \Rightarrow \text{Vô lý}$$

- **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b nên dự đoán Min S đạt tại $a = b > 0$

- **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a=b} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}} = \frac{2a}{\alpha a} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=4} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

- **Lời giải đúng:**

$$S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}. \text{ Với } a = b > 0 \text{ thì Min } S = \frac{5}{2}$$

Bài 8*. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Bình luận và lời giải

- **Sai lầm thường gặp:**

$$S = a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6 \cdot \sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = 6 \Rightarrow \text{Min } S = 6$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 6 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow a + b + c = 3 > \frac{3}{2} \text{ trái với giả thiết.}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $\text{Min} S$ đạt tại $a = b = c = \frac{1}{2}$

• **Sơ đồ điểm rơi 1:**

$$\boxed{a = b = c = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = b = c = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha a} = \frac{1}{\alpha b} = \frac{1}{\alpha c} = \frac{2}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Cách 1:** $S = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(a + b + c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

$$\geq 6 \cdot \sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}} + \frac{3}{4} \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right) = 3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\geq 3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} = 3 + \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{a+b+c} \geq 3 + \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{15}{2}$$

Với $a = b = c = \frac{1}{2}$ thì $\text{Min } S = \frac{15}{2}$

• **Sơ đồ điểm rơi 2:**

$$\boxed{a = b = c = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha a = \alpha b = \alpha c = \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 4} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Cách 2:** $S = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(4a + 4b + 4c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3(a + b + c)$

$$\geq 6 \cdot \sqrt[6]{4a \cdot 4b \cdot 4c \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} - 3(a + b + c) \geq 12 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

Với $a = b = c = \frac{1}{2}$ thì $\text{Min } S = \frac{15}{2}$

Bài 9*. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:** $S = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$

$$\geq 9 \cdot \sqrt[9]{a^2 b^2 c^2 \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{2c}} = \frac{9}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \text{Min } S = \frac{9}{\sqrt[3]{4}}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:** $\text{Min } S = \frac{9}{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{2c} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

$$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow a + b + c = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} > \frac{3}{2} \text{ trái với giả thiết.}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán Min S đạt tại $a = b = c = \frac{1}{2}$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a = b = c = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\alpha a} = \frac{1}{\alpha b} = \frac{1}{\alpha c} = \frac{2}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 8} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Lời giải đúng:**

$$S = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} =$$

$$= \left(a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{8a} + \frac{1}{8b} + \frac{1}{8c} + \frac{1}{8a} + \frac{1}{8b} + \frac{1}{8c} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\geq 9 \cdot \sqrt[9]{a^2 b^2 c^2 \frac{1}{8a} \cdot \frac{1}{8b} \cdot \frac{1}{8c} \cdot \frac{1}{8a} \cdot \frac{1}{8b} \cdot \frac{1}{8c}} + \frac{3}{4} \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right)$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cdot 2 = \frac{27}{4}$$

$$\text{Với } a = b = c = \frac{1}{2} \text{ thì Min } S = \frac{27}{4}$$

Bài 10.** Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm Min $S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:**

$$S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \cdot \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}} = 3 \cdot \sqrt[6]{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right) \left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)}$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[6]{\left(2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{b^2}}\right) \left(2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{c^2}}\right) \left(2\sqrt{c^2 \cdot \frac{1}{a^2}}\right)} = 3 \cdot \sqrt[6]{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{Min } S = 3\sqrt{2}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow a + b + c = 3 > \frac{3}{2} \text{ trái với giả thiết.}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán Min S đạt tại $a = b = c = \frac{1}{2}$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{aa^2}=\frac{1}{ab^2}=\frac{1}{ac^2}=\frac{4}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=16} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Lời giải 1:**

$$S = \sqrt{a^2 + \underbrace{\frac{1}{16b^2} + \dots + \frac{1}{16b^2}}_{16 \text{ số}}} + \sqrt{b^2 + \underbrace{\frac{1}{16c^2} + \dots + \frac{1}{16c^2}}_{16 \text{ số}}} + \sqrt{c^2 + \underbrace{\frac{1}{16a^2} + \dots + \frac{1}{16a^2}}_{16 \text{ số}}}$$

$$\geq \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16} b^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{b^2}{16^{16} c^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{c^2}{16^{16} a^{32}}}}$$

$$= \sqrt{17} \left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8 b^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{b}{16^8 c^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{c}{16^8 a^{16}}} \right]$$

$$\geq \sqrt{17} \left[3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{a}{16^8 b^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{b}{16^8 c^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{c}{16^8 a^{16}}}} \right] = 3\sqrt{17} \cdot \sqrt[17]{\frac{1}{16^8 a^5 b^5 c^5}}$$

$$= \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{(2a \cdot 2b \cdot 2c)^5}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Với } a = b = c = \frac{1}{2} \text{ thì Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Phối hợp với điểm rơi trong bất đẳng thức Côsi – Schwarz:

Với $n = 2$: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2$. Điều kiện $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \geq 0$

Ý nghĩa: Chuyển đổi một biểu thức toán học ở trong căn bậc hai thành một biểu thức khác ở ngoài căn để nhận được một biểu thức linh động hơn.

• Xét đánh giá giả định với các số α, β

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2\right](\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \left(\alpha a + \frac{\beta}{b}\right) \quad (1)$$

$$+ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2\right](\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \left(\alpha b + \frac{\beta}{c}\right) \quad (2)$$

$$+ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right](\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \left(\alpha c + \frac{\beta}{a}\right) \quad (3)$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \left[\alpha(a+b+c) + \beta\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right] = S_0$$

Do S là biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $S = S_0$ tại điểm rơi $a = b = c = \frac{1}{2}$, khi đó tất cả các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thời phải xảy ra dấu bằng tức là ta có sơ đồ điểm rơi sau:

Sơ đồ:

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1/b}{\beta} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1/c}{\beta} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1/a}{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{\frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \end{cases}} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

Kết hợp với biến đổi theo "**Điểm rơi**" trong Côsi ta có lời giải sau:

• **Lời giải 2:**

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(a + \frac{4}{b}\right) \quad (1)$$

$$+ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(b + \frac{4}{c}\right) \quad (2)$$

$$+ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(c + \frac{4}{a}\right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(a+b+c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left[a+b+c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{15}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[6 \cdot \sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}} + \frac{15}{4} \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(3 + \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(3 + \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(3 + \frac{45}{4} \cdot 2 \right) = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\text{Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$

Bài 11. Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \sin A + \sin B + \sin C + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\sin A + \sin B + \sin C + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A \sin B \sin C}} = 6 \Rightarrow \text{Min } T = 6$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } T = 6 \Leftrightarrow \sin A = \sin B = \sin C = \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\sin C} = 1$$

$$\Rightarrow A = B = C = \frac{\pi}{2} \text{ mâu thuẫn với } A + B + C = \pi$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

• **Bổ đề:** $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

• **Áp dụng:** Dự đoán điểm rơi của $\text{Min } T$ là $\sin A = \sin B = \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{\sin A = \sin B = \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \sin A = \alpha \sin B = \alpha \sin C \\ \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\sin C} = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{4}{3}}: \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Lời giải đúng:**

$$T = \left(\frac{4}{3} \sin A + \frac{4}{3} \sin B + \frac{4}{3} \sin C + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) - \frac{1}{3} (\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\geq 6 \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{4}{3} \sin A \right) \left(\frac{4}{3} \sin B \right) \left(\frac{4}{3} \sin C \right) \frac{1}{\sin A} \cdot \frac{1}{\sin B} \cdot \frac{1}{\sin C}} - \frac{1}{3} (\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= \frac{12}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} (\sin A + \sin B + \sin C) \geq \frac{12}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

Với $\sin A = \sin B = \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ hay $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ thì $\text{Min} T = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

Bài 12. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = a + b + c + \frac{1}{abc}$

(Vô địch Macedonia 1999)

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:**

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{abc}} = 4 \Rightarrow \text{Min } T = 4$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } T = 4 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{abc} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \text{ mâu thuẫn với giả thiết.}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Dự đoán điểm rơi của Min T là $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, khi đó $\frac{1}{abc} = 3\sqrt{3}$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \begin{cases} a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{abc} = \frac{3\sqrt{3}}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 9}: \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Lời giải đúng:**

$$a + b + c + \frac{1}{abc} + \frac{8}{9abc} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{9abc}} + \frac{8}{9 \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \right)^3} = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$



Bài 13. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{a+b+c} + \frac{d}{a+b+c} + \\ + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d}$$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp 1:**

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b+c+d} \cdot \frac{b+c+d}{a}} = 2 \\ \frac{b}{c+d+a} + \frac{c+d+a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c+d+a} \cdot \frac{c+d+a}{b}} = 2 \\ \frac{c}{d+a+b} + \frac{d+a+b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{d+a+b} \cdot \frac{d+a+b}{c}} = 2 \\ \frac{d}{a+b+c} + \frac{a+b+c}{d} \geq 2\sqrt{\frac{d}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{d}} = 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow S \geq 8 \Rightarrow \text{Min } S = 8$$

• **Sai lầm thường gặp 2:**

Sử dụng bất đẳng thức Côsi trực tiếp cho 8 số

$$S \geq 8 \cdot \sqrt[8]{\frac{a}{b+c+d} \cdot \frac{b}{c+d+a} \cdot \frac{c}{d+a+b} \cdot \frac{d}{a+b+c} \cdot \frac{b+c+d}{a} \cdot \frac{c+d+a}{b} \cdot \frac{d+a+b}{c} \cdot \frac{a+b+c}{d}} = 8 \Rightarrow \text{Min } S = 8$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+c+d \\ b = c+d+a \\ c = d+a+b \\ d = a+b+c \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d = 3(a+b+c+d) \Rightarrow 1 = 3; \text{ Vô lý}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Để tìm Min S ta cần chú ý S là một biểu thức đối xứng với a, b, c, d do đó Min S (hoặc Max S) nếu có thường đạt tại "Điểm rơi tự do": $a = b = c = d > 0$.

Vậy ta cho trước $a = b = c = d > 0$ và dự đoán $\text{Min } S = \frac{4}{3} + 12 = 13\frac{1}{3}$

Từ đó suy ra các đánh giá của các bất đẳng thức bộ phận phải có điều kiện
đầu bằng xảy ra là tập con của điều kiện dự đoán: $a = b = c = d > 0$

• **Sơ đồ điểm rơi:** Cho $a = b = c = d > 0$ ta có

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{c+d+a} = \frac{c}{d+a+b} = \frac{d}{a+b+c} = \frac{1}{3} \\ \frac{b+c+d}{\alpha a} = \frac{c+d+a}{\alpha b} = \frac{d+a+b}{\alpha c} = \frac{a+b+c}{\alpha d} = \frac{3}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 9$$

• **Cách 1:** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\begin{aligned} S &= \sum_{a,b,c,d} \left(\frac{a}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{9a} \right) + \sum_{a,b,c,d} \frac{8}{9} \cdot \frac{b+c+d}{9a} \geq \\ &\geq 8 \cdot \sqrt[12]{\frac{a}{b+c+d} \cdot \frac{b}{c+d+a} \cdot \frac{c}{d+a+b} \cdot \frac{d}{a+b+c} \cdot \frac{b+c+d}{9a} \cdot \frac{c+d+a}{9b} \cdot \frac{d+a+b}{9c} \cdot \frac{a+b+c}{9d}} \\ &\quad + \frac{8}{9} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{a}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} \right) \\ &\geq \frac{8}{3} + \frac{8}{9} \cdot 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{d}} = \frac{8}{3} + \frac{8}{9} \cdot 12 = \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Với $a = b = c = d > 0$ thì $\text{Min } S = 13\frac{1}{3}$

• **Cách 2:** §Æt $S_1 = \sum \frac{b+c+d}{a}$; $S_2 = \sum \frac{a}{b+c+d} \Rightarrow S = S_1 + S_2$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{a}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} \\ &\geq 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{d}} = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 + 4 &= \sum \left(\frac{a}{b+c+d} + 1 \right) = (a+b+c+d) \sum \frac{1}{b+c+d} = \frac{1}{3} \sum (b+c+d) \cdot \sum \frac{1}{b+c+d} \\ &\geq \frac{4}{3} \sqrt[4]{(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)(a+b+c)} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)(a+b+c)}} = \frac{16}{3} \\ \Rightarrow S_2 &\geq \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} \Rightarrow S = S_1 + S_2 \geq 12 + \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Với $a = b = c = d > 0$ thì $\text{Min } S = 13\frac{1}{3}$

Bài 14. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(1 + \frac{2a}{3b}\right) \left(1 + \frac{2b}{3c}\right) \left(1 + \frac{2c}{3d}\right) \left(1 + \frac{2d}{3a}\right)$$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:**

$$S = \left(1 + \frac{2a}{3b}\right) \left(1 + \frac{2b}{3c}\right) \left(1 + \frac{2c}{3d}\right) \left(1 + \frac{2d}{3a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{2a}{3b}} \cdot 2\sqrt{\frac{2b}{3c}} \cdot 2\sqrt{\frac{2c}{3d}} \cdot 2\sqrt{\frac{2d}{3a}} = \frac{64}{9} \Rightarrow \text{Min } S = \frac{64}{9}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = \frac{64}{9} \Leftrightarrow 1 = \frac{2a}{3b} = \frac{2b}{3c} = \frac{2c}{3d} = \frac{2d}{3a} = \frac{2(a+b+c+d)}{3(a+b+c+d)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Vô lý}$$

• **Phân tích và tìm lời giải:**

Do S là biểu thức đối xứng với a, b, c, d nên dự đoán $\text{Min } S$ đạt tại

Điểm rơi tự do: $a = b = c = d > 0$, khi đó $S = \left(1 + \frac{2}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$

• **Cách 1:** Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2a}{3b} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{a}{3b} + \frac{a}{3b} \geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{3b}\right)^2} = \frac{5}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{5}} \\ 1 + \frac{2b}{3c} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{b}{3c} + \frac{b}{3c} \geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{3c}\right)^2} = \frac{5}{3} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{5}} \\ 1 + \frac{2c}{3d} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{c}{3d} + \frac{c}{3d} \geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{c}{3d}\right)^2} = \frac{5}{3} \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2}{5}} \\ 1 + \frac{2d}{3a} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{d}{3a} + \frac{d}{3a} \geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{d}{3a}\right)^2} = \frac{5}{3} \left(\frac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow S = \left(1 + \frac{2a}{3b}\right) \left(1 + \frac{2b}{3c}\right) \left(1 + \frac{2c}{3d}\right) \left(1 + \frac{2d}{3a}\right) \geq \frac{625}{81} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{625}{81}$$

Với $a = b = c = d > 0$ thì $\text{Min } S = \frac{625}{81}$

• Cách 2:

$$\times \left\{ \begin{aligned} 1 + \frac{2a}{3b} &= \frac{3b+2a}{3b} = \frac{b+b+b+a+a}{3b} \geq \frac{5\sqrt[5]{b^3a^2}}{3b} \\ 1 + \frac{2b}{3c} &= \frac{3c+2b}{3c} = \frac{c+c+c+b+b}{3c} \geq \frac{5\sqrt[5]{c^3b^2}}{3c} \\ 1 + \frac{2c}{3d} &= \frac{3d+2c}{3d} = \frac{d+d+d+c+c}{3d} \geq \frac{5\sqrt[5]{d^3c^2}}{3d} \\ 1 + \frac{2d}{3a} &= \frac{3a+2d}{3a} = \frac{a+a+a+d+d}{3a} \geq \frac{5\sqrt[5]{a^3d^2}}{3a} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow S = \left(1 + \frac{2a}{3b}\right) \left(1 + \frac{2b}{3c}\right) \left(1 + \frac{2c}{3d}\right) \left(1 + \frac{2d}{3a}\right) \geq \frac{625}{81} \cdot \frac{\sqrt[5]{a^5b^5c^5d^5}}{abcd} = \frac{625}{81}$$

$$\text{Với } a = b = c = d > 0 \text{ thì Min } S = \frac{625}{81}$$

Bài 15. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \geq 81$

Giải

Biến đổi và sử dụng 2 lần bất đẳng thức Côsi cho 9 số ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ca} \geq 9 \cdot \sqrt[9]{\frac{1}{a^2b^2c^2ab \cdot ab \cdot bc \cdot bc \cdot ca \cdot ca}} \\ &= \frac{9}{\sqrt[9]{a^2b^2c^2ab \cdot ab \cdot bc \cdot bc \cdot ca \cdot ca}} \geq \frac{9}{\frac{a^2+b^2+c^2+ab+ab+bc+bc+ca+ca}{9}} = \frac{81}{(a+b+c)^2} \geq 81 \end{aligned}$$

Bài 16. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq 1 \end{cases}$ CMR: $S = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 28$

Giải

Dự đoán $S = 1$ tại điểm rơi: $a = b = c = \frac{1}{3}$

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + 27 \cdot \frac{1}{27ab} + 27 \cdot \frac{1}{27bc} + 27 \cdot \frac{1}{27ca} \geq \\ &\geq 84 \cdot \sqrt[84]{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c^2}{a} \cdot \left(\frac{1}{27ab}\right)^{27} \cdot \left(\frac{1}{27bc}\right)^{27} \cdot \left(\frac{1}{27ca}\right)^{27}} = \frac{84}{\sqrt[84]{27^{81} a^{53} b^{53} c^{53}}} \\ &\geq \frac{84}{\sqrt[84]{27^{81} \left(\frac{53(a+b+c)}{53.3}\right)^{53.3}}} \geq \frac{84}{\sqrt[84]{27^{81} \left(\frac{1}{3}\right)^{3.53}}} = \frac{84}{\sqrt[84]{27^{28}}} = \frac{84}{3} = 28 \end{aligned}$$

Bài 1. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ Tìm Max của $S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a}$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{(a+b) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(a+b) + 1 + 1}{3} \\ + \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{(b+c) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(b+c) + 1 + 1}{3} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{(c+a) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(c+a) + 1 + 1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \frac{2(a+b+c) + 6}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{Max } S = \frac{8}{3}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Max } S = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b+c=1 \\ c+a=1 \end{cases} \Rightarrow 2(a+b+c) = 3 \Leftrightarrow 2 = 3 \Rightarrow \text{Vô lý}$$

• **Dự đoán điểm rơi của Max S:**

Do S là 1 biểu thức đối xứng với a, b, c nên Max S thường xảy ra tại điều kiện:

$$\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{2}{3} \\ b+c=\frac{2}{3} \\ c+a=\frac{2}{3} \end{cases}$$

• **Trình bày lời giải đúng:**

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt{(a+b) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{(a+b) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}} \\ + \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt{(b+c) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{(b+c) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt{(c+a) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{(c+a) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2(a+b+c)+4}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{6}{3}} = \sqrt[3]{18}$$

$$\text{Với } a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \text{ nên Max } S = \sqrt[3]{18}$$

Bài 2. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$S = \sqrt[3]{2a+b} + \sqrt[3]{2b+c} + \sqrt[3]{2c+d} + \sqrt[3]{2d+a}$$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:** Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$+ \begin{cases} \sqrt[3]{2a+b} = \sqrt[3]{(2a+b) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(2a+b)+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{2b+c} = \sqrt[3]{(2b+c) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(2b+c)+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{2c+d} = \sqrt[3]{(2c+d) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(2c+d)+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{2d+a} = \sqrt[3]{(2d+a) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(2d+a)+1+1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2a+b} + \sqrt[3]{2b+c} + \sqrt[3]{2c+d} + \sqrt[3]{2d+a} \leq \frac{3(a+b+c+d)+8}{3} = \frac{11}{3} \Rightarrow \text{Max } S = \frac{11}{3}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Max } S = \frac{11}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ 2b+c=1 \\ 2c+d=1 \\ 2d+a=1 \end{cases} \Rightarrow 3(a+b+c+d)=4 \Rightarrow 3=4: \text{ Vô lý}$$

• **Phân tích và tìm lời giải:**

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c, d nên dự đoán Max S đạt tại điểm rơi.

$$\begin{cases} a=b=c=d \\ a+b+c+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4} \Rightarrow 2a+b=2b+c=2c+d=2d+a=\frac{3}{4}$$

• **Trình bày lời giải đúng:** Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{(2a+b) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} \leq \frac{(2a+b) + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{3} \\ \sqrt[3]{(2b+c) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} \leq \frac{(2b+c) + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{3} \\ \sqrt[3]{(2c+d) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} \leq \frac{(2c+d) + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{3} \\ \sqrt[3]{(2d+a) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} \leq \frac{(2d+a) + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{3} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{9}{16}} \cdot \left[\sqrt[3]{2a+b} + \sqrt[3]{2b+c} + \sqrt[3]{2c+d} + \sqrt[3]{2d+a} \right] \leq \frac{3(a+b+c+d) + 6}{3} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{9}{16}} S \leq 3 \Rightarrow S \leq \sqrt[3]{48} = 2\sqrt[3]{6}$$

Với $2a+b=2b+c=2c+d=2d+a=\frac{3}{4} \Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4}$ thì $\text{Max } S = 2\sqrt[3]{6}$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c, d, e > 0 \\ a+b+c+d+e=5 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt[3]{(a+b)(c+d+e)} + \sqrt[3]{(b+c)(d+e+a)} + \sqrt[3]{(c+d)(e+a+b)} + \sqrt[3]{(d+e)(a+b+c)} + \sqrt[3]{(e+a)(b+c+d)}$$

Giải

• **Dự đoán điểm rơi Max của S**

Do S là 1 biểu thức đối xứng với a, b, c, d, e nên Max S thường xảy ra tại

$$\begin{cases} a=b=c=d=e \\ a+b+c+d+e=5 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=d=e=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=b+c=c+d=d+e=e+a=2 \\ c+d+e=d+e+a=e+a+b=a+b+c=b+c+d=3 \end{cases}$$

Từ đó ta sẽ xác định được các hằng số cần phải nhân thêm ở trong S

• **Trình bày lời giải:**

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[5]{(a+b)(c+d+e)} = \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \sqrt[5]{(3a+3b)(2c+2d+2e).6^3} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \frac{3(a+b)+2(c+d+e)+18}{5} \\
 & \sqrt[5]{(b+c)(d+e+a)} = \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \sqrt[5]{(3b+3c)(2d+2e+2a).6^3} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \frac{3(b+c)+2(d+e+a)+18}{5} \\
 + & \sqrt[5]{(c+d)(e+a+b)} = \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \sqrt[5]{(3c+3d)(2e+2a+2b).6^3} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \frac{3(c+d)+2(e+a+b)+18}{5} \\
 & \sqrt[5]{(d+e)(a+b+c)} = \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \sqrt[5]{(3d+3e)(2a+2b+2c).6^3} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \frac{3(d+e)+2(a+b+c)+18}{5} \\
 & \sqrt[5]{(e+a)(b+c+d)} = \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \sqrt[5]{(3e+3a)(2b+2c+2d).6^3} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \frac{3(e+a)+2(b+c+d)+18}{5}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{1}{\sqrt[5]{6^4}} \cdot \frac{12(a+b+c+d+e)+18.5}{5} = \frac{30}{\sqrt[5]{6^4}} = \frac{5.6}{\sqrt[5]{6^4}} = 5.\sqrt[5]{6}$$

Với $a = b = c = d = e = 1$ thì $\text{Max } S = 5.\sqrt[5]{6}$

Bài 4. Chứng minh rằng $\forall a \in [-1, 1]$ ta luôn có bất đẳng thức:

$$S = \sqrt[5]{1-a^5} + \sqrt[4]{1-a^4} + \sqrt[3]{1-a^3} + \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1+a^2} + \sqrt[3]{1+a^3} + \sqrt[4]{1+a^4} + \sqrt[5]{1+a^5} \leq 8$$

Giải

• **Dự đoán:** Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

• Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[5]{1-a^5} = \sqrt[5]{(1-a^5).1.1.1.1} \leq \frac{(1-a^5)+1+1+1+1}{5} = \frac{5-a^5}{5} \\
 & \sqrt[5]{1+a^5} = \sqrt[5]{(1+a^5).1.1.1.1} \leq \frac{(1+a^5)+1+1+1+1}{5} = \frac{5+a^5}{5} \\
 & \sqrt[4]{1-a^4} = \sqrt[4]{(1-a^4).1.1.1} \leq \frac{(1-a^4)+1+1+1}{4} = \frac{4-a^4}{4} \\
 & \sqrt[4]{1+a^4} = \sqrt[4]{(1+a^4).1.1.1} \leq \frac{(1+a^4)+1+1+1}{4} = \frac{4+a^4}{4} \\
 + & \sqrt[3]{1-a^3} = \sqrt[3]{(1-a^3).1.1} \leq \frac{(1-a^3)+1+1}{3} = \frac{3-a^3}{3} \\
 & \sqrt[3]{1+a^3} = \sqrt[3]{(1+a^3).1.1} \leq \frac{(1+a^3)+1+1}{3} = \frac{3+a^3}{3} \\
 & \sqrt{1-a^2} = \sqrt{(1-a^2).1} \leq \frac{(1-a^2)+1}{2} = \frac{2-a^2}{2} \\
 & \sqrt{1+a^2} = \sqrt{(1+a^2).1} \leq \frac{(1+a^2)+1}{2} = \frac{2+a^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{(5-a^5)+(5+a^5)}{5} + \frac{(4-a^4)+(4+a^4)}{4} + \frac{(3-a^3)+(3+a^3)}{3} + \frac{(2-a^2)+(2+a^2)}{2} = 8$$

Với $a = 0$ thì $S = 8$

Bài 5. Cho $a \geq 2$; $b \geq 6$; $c \geq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \frac{bc\sqrt{a-2} + ca \cdot \sqrt[3]{b-6} + ab \cdot \sqrt[4]{c-12}}{abc}$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{cases} bc\sqrt{a-2} = \frac{bc}{\sqrt{2}} \sqrt{(a-2) \cdot 2} \leq \frac{bc}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(a-2)+2}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{2}} \\ + ca \cdot \sqrt[3]{b-6} = \frac{ca}{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{(b-6) \cdot 3 \cdot 3} \leq \frac{ca}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{(b-6)+3+3}{2} = \frac{abc}{2 \cdot \sqrt[3]{9}} \\ ab \cdot \sqrt[4]{c-12} = \frac{ab}{\sqrt[4]{64}} \cdot \sqrt[4]{(c-12) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} \leq \frac{ab}{\sqrt[4]{64}} \cdot \frac{(c-12)+4+4+4}{4} = \frac{abc}{8 \cdot \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{1}{abc} \cdot \left(\frac{abc}{2\sqrt{2}} + \frac{abc}{8\sqrt{2}} + \frac{abc}{3 \cdot \sqrt[3]{9}} \right) = \frac{5}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{9}}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a-2=2 \\ b-6=3 \\ c-12=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=9 \\ c=16 \end{cases} \text{ thì } \text{Max } S = \frac{5}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{9}}$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = (3-x)(4-y)(2x+3y)$

Giải

$$S = \frac{1}{6} (6-2x)(12-3y)(2x+3y) \leq \frac{1}{6} \left[\frac{(6-2x)+(12-3y)+(2x+3y)}{3} \right]^3 = 36$$

Với $6-2x = 12-3y = 2x+3y = 6 \Leftrightarrow x = 0, y = 2$ thì $\text{Max } S = 36$

Bài 7. Cho $x, y > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = \frac{(x+y)^3}{xy^2}$

Giải

$$xy^2 = \frac{1}{16} \cdot 4x \cdot 2y \cdot 2y \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4x + 2y + 2y}{3} \right)^3 = \frac{1}{16} \left[\frac{4}{3}(x+y) \right]^3 = \frac{4(x+y)^3}{27}$$

$$S = \frac{(x+y)^3}{xy^2} \geq \frac{(x+y)^3}{\frac{4(x+y)^3}{27}} = \frac{27}{4}. \text{ Với } y = 2x > 0 \text{ thì } \text{Min } S = \frac{27}{4}$$

Bài 8. Cho $x \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{4(1-x^2)x^2} \leq \frac{4(1-x^2) + x^2}{2} = \frac{4-3x^2}{2} \Rightarrow 13\sqrt{x^2 - x^4} \leq \frac{52-39x^2}{4}$$

$$\sqrt{9x^2 \cdot 4(1+x^2)} \leq \frac{9x^2 + 4(1+x^2)}{2} = \frac{13x^2 + 4}{2} \Rightarrow 9\sqrt{x^2 + x^4} \leq \frac{39x^2 + 12}{4}$$

$$\Rightarrow S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} \leq \frac{52-39x^2}{4} + \frac{39x^2 + 12}{4} = 16$$

$$\text{Với } \begin{cases} 4(1-x^2) = x^2 \\ 9x^2 = 4(1+x^2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ thì } \text{Max } S = 16$$

Bài 9. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a \geq 2, b \geq 9, c \geq 1945$ và $a+b+c=2000$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = abc$

Giải

Do $a+b+c=2000$ và $c \geq 1945$ nên $a+b \leq 55$.

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\left(\frac{778}{11} \right)^2 \cdot abc = \frac{778}{11} a \cdot \frac{778}{11} b \cdot c \leq \left[\frac{\frac{778}{11}(a+b) + c}{3} \right]^3 = \left[\frac{\frac{767}{11}(a+b) + (a+b+c)}{3} \right]^3$$

$$\leq \left(\frac{767.5 + 2000}{3} \right)^3 = 1945^3 \Rightarrow P = abc \leq \frac{1945.55^2}{4}$$

$$\text{Với } a=b=\frac{55}{2}, c=1945 \text{ thì } \text{Max } P = \frac{1945.55^2}{4}$$

III. ĐIỂM RƠI KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Bài 1. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + 2b + 3c \geq 20 \end{cases}$. Chứng minh: $S = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13$

Giải

Dự đoán $S = 13$ tại điểm rơi: $a = 2, b = 3, c = 4$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\begin{cases} a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4 & \begin{cases} \frac{3}{4}\left(a + \frac{4}{a}\right) \geq \frac{3}{4} \cdot 4 = 3 \\ b + \frac{9}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{9}{b}} = 6 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(b + \frac{9}{b}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \\ c + \frac{16}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{16}{c}} = 8 \end{cases} \\ \frac{1}{4}\left(c + \frac{16}{c}\right) \geq \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 8 \quad (1)$$

Theo giả thiết: $a + 2b + 3c \geq 20 \Rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{b}{2} + \frac{3}{4}c \geq 5 \quad (2)$

Cộng các vế của (1) và (2) $\Rightarrow S = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$S = 30a + 3b^2 + \frac{2c^3}{9} + 36\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 84$$

Giải

Dự đoán $S = 84$ tại điểm rơi: $a = 1, b = 2, c = 3$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{cases} 2a + 1 \cdot \frac{b^2}{4} + 2 \cdot \frac{2}{ab} \geq 5 & \begin{cases} 9\left(2a + \frac{b^2}{4} + \frac{4}{ab}\right) \geq 45 \\ 3 \cdot \frac{b^2}{4} + 2 \cdot \frac{c^3}{27} + 6 \cdot \frac{6}{bc} \geq 11 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3b^2}{4} + \frac{2c^3}{27} + \frac{36}{bc} \geq 11 \\ \frac{c^3}{27} + 3a + 3 \cdot \frac{3}{ca} \geq 7 \end{cases} \\ 4\left(\frac{c^3}{27} + 3a + \frac{9}{ca}\right) \geq 28 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 30a + 3b^2 + \frac{2c^3}{9} + 36\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 45 + 11 + 28 \geq 84$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ac \geq 12; bc \geq 8 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$S = (a + b + c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{2}$$

Giải

Dự đoán $S = \frac{121}{2}$ tại điểm rơi: $a = 3, b = 2, c = 4$.

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{6}{ab} \geq 3 \\ \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{8}{bc} \geq 3 \\ \frac{c}{4} + \frac{a}{3} + \frac{12}{ca} \geq 3 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{24}{abc} \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{6}{ab}\right) \geq 3 \\ 4 \cdot \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{8}{bc}\right) \geq 12 \\ 7 \cdot \left(\frac{c}{4} + \frac{a}{3} + \frac{12}{ca}\right) \geq 21 \\ 1 \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{24}{abc}\right) \geq 4 \end{cases}$$

$$S = 3(a + b + c) + \frac{6}{ab} + \frac{32}{bc} + \frac{84}{ca} + \frac{24}{abc} \geq 40. \text{ Mà } \begin{cases} ac \geq 12 \\ bc \geq 8 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \frac{1}{ac} \leq \frac{1}{12} \\ \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } 40 \leq S = 3\left[(a + b + c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc}\right] + 26 \cdot \frac{1}{bc} + 78 \cdot \frac{1}{ca}$$

$$\leq 3\left[(a + b + c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc}\right] + 26 \cdot \frac{1}{8} + 78 \cdot \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{363}{2} \leq 3\left[(a + b + c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{121}{2} \leq (a + b + c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc}$$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của $S = 4ab + 8bc + 6ca$

Giải

Giả sử $S = ma(b+c) + nb(c+a) + pc(a+b) = (m+n)ab + (n+p)bc + (p+m)ca$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=4 \\ n+p=8 \\ p+m=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=3 \\ p=5 \end{cases} \Rightarrow S = 4ab + 8bc + 6ca = a(b+c) + 3b(c+a) + 5c(a+b) \\ = a(3-a) + 3b(3-b) + 5c(3-c)$$

$$\Rightarrow S = \frac{81}{4} - \left[\left(a - \frac{3}{2} \right)^2 + 3 \left(b - \frac{3}{2} \right)^2 + 5 \left(c - \frac{3}{2} \right)^2 \right]$$

$$\text{Đặt } x = \left| a - \frac{3}{2} \right|; y = \left| b - \frac{3}{2} \right|; z = \left| c - \frac{3}{2} \right| \Rightarrow x + y + z \geq \left| a + b + c - \frac{9}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

Khi đó: $S = \frac{81}{4} - (x^2 + 3y^2 + 5z^2) \Leftrightarrow x^2 + 3y^2 + 5z^2 = \frac{81}{4} - S$. Với $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ta có:

$$\begin{cases} x^2 + \alpha^2 \geq 2\sqrt{x^2\alpha^2} = 2\alpha x \\ 3y^2 + 3\beta^2 \geq 6\sqrt{y^2\beta^2} = 6\beta y \\ 5z^2 + 5\gamma^2 \geq 10\sqrt{z^2\gamma^2} = 10\gamma z \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{81}{4} - S \right) + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) \geq 2(\alpha x + 3\beta y + 5\gamma z)$$

Chọn $\alpha = 3\beta = 5\gamma$

$$\Rightarrow S \leq \frac{81}{4} + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) - 2\alpha(x + y + z) \leq \frac{81}{4} + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) - 3\alpha$$

$$\text{Max } S = \frac{81}{4} + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) - 3\alpha \Leftrightarrow x = \alpha; y = \beta; z = \gamma \text{ và } x + y + z = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x + y + z = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{45}{46}; \beta = \frac{15}{46}; \gamma = \frac{9}{46}. \text{ Khi đó:}$$

$$\text{Max } S = \frac{81}{4} + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) - 3\alpha = \frac{81}{4} + \frac{23\alpha^2}{15} - 3\alpha = \frac{432}{23}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \left| a - \frac{3}{2} \right| = \alpha = \frac{45}{46}; \left| b - \frac{3}{2} \right| = \beta = \frac{15}{46}; \left| c - \frac{3}{2} \right| = \gamma = \frac{9}{46}$$

$$\Leftrightarrow a - \frac{3}{2} = -\frac{45}{46}; b - \frac{3}{2} = -\frac{15}{46}; c - \frac{3}{2} = -\frac{9}{46} \Leftrightarrow a = \frac{12}{23}; b = \frac{27}{23}; c = \frac{30}{23}$$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $S = 10a^2 + 10b^2 + c^2 \geq 4$

Giải

$$S = 10a^2 + 10b^2 + c^2 = (10 - \alpha)(a^2 + b^2) + \left(\alpha a^2 + \frac{1}{2}c^2\right) + \left(\alpha b^2 + \frac{1}{2}c^2\right) \quad (0 < \alpha < 10)$$

$$+ \begin{cases} (10 - \alpha)(a^2 + b^2) \geq 2(10 - \alpha)ab \\ \alpha a^2 + \frac{1}{2}c^2 \geq \sqrt{2\alpha} \cdot ac \\ \alpha b^2 + \frac{1}{2}c^2 \geq \sqrt{2\alpha} \cdot bc \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \geq 2(10 - \alpha)ab + \sqrt{2\alpha}(bc + ca).$$

$$\text{Chọn } 2(10 - \alpha) = \sqrt{2\alpha} \Leftrightarrow 2(\alpha - 10)^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 41\alpha + 200 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 8$$

$$\Rightarrow 2(10 - \alpha) = \sqrt{2\alpha} = 4, \text{ suy ra } S \geq 4(ab + bc + ca) = 4 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow a = b = \frac{c}{\sqrt{2\alpha}} = \frac{c}{4} \text{ và } ab + bc + ca = 1 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{3}; c = \frac{4}{3}$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a \geq b \geq c \geq d > 0 \\ a \leq 10; ab \leq 80; abc \leq 400. \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của $S = a + b + c + d$
 $abcd \leq 1600$

Solution

$$\begin{aligned} 27 &= 4 + 5 + 7 + 10 = d \left(\frac{10}{a} + \frac{8}{b} + \frac{5}{c} + \frac{4}{d} \right) + (c - d) \left(\frac{10}{a} + \frac{8}{b} + \frac{5}{c} \right) + (b - c) \left(\frac{10}{a} + \frac{8}{b} \right) + (a - b) \frac{10}{a} \\ &\geq d \left(4 \cdot \sqrt[4]{\frac{10}{a} \cdot \frac{8}{b} \cdot \frac{5}{c} \cdot \frac{4}{d}} \right) + (c - d) \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{a} \cdot \frac{8}{b} \cdot \frac{5}{c}} \right) + (b - c) \left(2 \cdot \sqrt{\frac{10}{a} \cdot \frac{8}{b}} \right) + (a - b) \frac{10}{a} \\ &\geq 4d + 3(c - d) + 2(b - c) + (a - b) = a + b + c + d \end{aligned}$$

Với $a = 10, b = 8, c = 5, d = 4$ ta có $\text{Max } S = 27$

Bài 7. Cho $\begin{cases} a \geq 7; 5a + 7b \geq 70 \\ 10a + 14b + 35c \geq 210 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a^3 + b^3 + c^3$

Giải

• **Bổ đề:** $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^3 \quad \forall x, y, z > 0$

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned} x^3 + \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 + \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 &\geq 3x\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \\ y^3 + \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 + \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 &\geq 3y\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \\ z^3 + \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 + \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 &\geq 3z\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \end{aligned} \right] \\
 & \Rightarrow (x^3 + y^3 + z^3) + 6\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq 3(x+y+z)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \\
 & \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3
 \end{aligned}$$

• **Áp dụng:** $S = a^3 + b^3 + c^3 = 8\left[\left(\frac{a}{7}\right)^3 + \left(\frac{b}{5}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^3\right] + 117\left[\left(\frac{a}{7}\right)^3 + \left(\frac{b}{5}\right)^3\right] + 218\left(\frac{a}{7}\right)^3$

$$\geq 8\left[3\left(\frac{\frac{a}{7} + \frac{b}{5} + \frac{c}{2}}{3}\right)^3\right] + 117\left[2\left(\frac{\frac{a}{7} + \frac{b}{5}}{2}\right)^3\right] + 218\left(\frac{a}{7}\right)^3 \geq 8 \times 3 + 117 \times 2 + 218 = 476$$

Với $a = 7, b = 5, c = 2$ ta có Min $S = 476$

Bài 8. Cho ΔABC nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \operatorname{tg} A + 2 \operatorname{tg} B + 5 \operatorname{tg} C$

Giải

Đặt $x = \operatorname{tg} A, y = \operatorname{tg} B, z = \operatorname{tg} C$. Khi đó bài toán trở thành:

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = x + 2y + 5z$. Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 6 số ta có:

$$xyz = x + y + z = 3\left(\frac{x}{3}\right) + 2\left(\frac{y}{2}\right) + z \geq 6 \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{y}{2}\right)^2} z$$

$$\Rightarrow (xyz)^6 \geq 6^6 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{y}{2}\right)^2 z = 6^3 \cdot 2 \cdot x^3 y^2 z \Leftrightarrow x^3 y^4 z^5 \geq 6^3 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2^4$$

$$P = x + 2y + 5z = 3\left(\frac{x}{3}\right) + 4\left(\frac{y}{2}\right) + 5z \geq 12 \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{y}{2}\right)^4} z^5 = 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{x^3 y^4 z^5}{3^3 2^4}} \geq 12$$

Với $x = 3, y = 2, z = 1$ thì $P = 12$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 12.

IV. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a > b \geq 0$. Chứng minh rằng: $2a + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} \geq 5$

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{(a^2 + 16|a| + 48)(a^2 + 12|a| + 27)}{a^2}$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b \geq 4 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = 2a + 3b + \frac{6}{a} + \frac{10}{b}$

Bài 4*. Cho $a \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{a^6 - 10a^5 + 19a^4 + 62a^3 - 151a^2 - 96a + 257}{a^3 - 5a^2 - 3a + 16}$$

Bài 5*. Cho $a, b, c > 0$ và $a = \text{Max}\{a, b, c\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b} + 2\sqrt{1 + \frac{b}{c}} + 3\sqrt[3]{1 + \frac{c}{a}}$

Bài 6*. Cho số thực a thỏa mãn: $a^5 - a^3 + a - 2 = 0$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{a^{16} + a^{12} + 7a^8 + 12a^4 + 12}{a^{12} + 7a^8 + 7a^4 + 12} < \sqrt[3]{4}$$

Bài 7. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Tìm Max của $S = \sqrt[5]{2a+b} + \sqrt[5]{2b+c} + \sqrt[5]{2c+a}$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{a^4 + a + 1 + 32\sqrt[4]{a^3 - 4a^2 + 7a - 12}}{a^4 + a^2 + 16a - 11} \leq 1 \quad \forall a \geq 3$

Bài 9. Cho $x, y, z > 0$. Tìm Min của $S = \frac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$

Bài 10. Chứng minh rằng: $13\sqrt{a^2 - a^4} + 9\sqrt{a^2 + a^4} \leq 16 \quad \forall 0 \leq a \leq 1$

Bài 11*. Cho $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c \leq \text{Min}\{a\sqrt{2}, b\sqrt{3}\}$; $a + c\sqrt{3} \geq \sqrt{6}$; $b\sqrt{3} + c\sqrt{10} \geq 2\sqrt{5}$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{3}{c^2} \leq \frac{118}{15}$

Bài 12*. Cho $a, b, c > 0$ và $\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{2}{3}\right)\left(c + \frac{1}{4}\right) = 5$. Chứng minh: $a^2b^3c^4 \leq 1$

Bài 13*. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ (a^2 + a + 2)(b + 1)^2(c^2 + 3c) = 64 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^3b^4c^5 \leq 1$

Bài 14*. Cho $\begin{cases} a, b, c > 2 \\ a^3b^4c^5 = 216 \cdot 10^5 \end{cases}$. Chứng minh: $(a - 2)(b - 2)^2(c - 2)^3 \leq 108$

Bài 15. Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

Bài 16. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(2 + \frac{3a}{5b}\right) \left(2 + \frac{3b}{5c}\right) \left(2 + \frac{3c}{5d}\right) \left(2 + \frac{3d}{5a}\right)$$

Bài 17. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^2b + b^2c + c^2a$

Bài 18. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $2lab + 2bc + 8ca \leq 12$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$ (VNTST 2001)

Bài 19. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d \leq 1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right)$$

Bài 20. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d \leq 1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{2}{c} + \frac{1}{d}\right) \left(1 + \frac{2}{d} + \frac{1}{a}\right)$$

Bài 21. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0; m, n, p > 0 \\ a + b + c \leq 1; m + n + p \leq \frac{3}{2} \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{2}{b} + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{c} + \frac{1}{p}\right)$$

Bài 22. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d \leq 2 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{d}\right) \left(d + \frac{1}{a}\right)$$

Bài 23. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ abcd \geq 16 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(a + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(b + \frac{2}{c} + \frac{1}{d}\right) \left(c + \frac{2}{d} + \frac{1}{a}\right) \left(d + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Bài 24. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b \leq 1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab$$

Bài 25. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b \leq 1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^2 b} + \frac{1}{a b^2}$$

Bài 26. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq 1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a b} + \frac{1}{b c} + \frac{1}{c a}$$

Bài 27. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq 1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

Bài 28. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq 1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

Bài 29. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt[3]{(2a+b)(a+c)a} + \sqrt[3]{(2b+c)(b+a)b} + \sqrt[3]{(2c+a)(c+b)c}$$

Bài 30. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Bài 31. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $(a+b+c) + \frac{3(4a+b)}{abc} \geq 9$

Bài 32. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $3b + 4c \geq 18$. Chứng minh: $(a+b+c) + \frac{6}{abc} \geq 4$

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $32a + 27b \geq 150$.

Chứng minh rằng: $a + b + c + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{47}{6}$

Bài 34. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $ac \geq 12$. Chứng minh rằng

$$a + b + c + 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq \frac{105}{8}$$

Bài 35. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & 24\left(\frac{1}{a^2 + 8bc} + \frac{1}{b^2 + 8ca} + \frac{1}{c^2 + 8ab}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \\ & \geq \frac{135}{4(a+b+c)^2} + \frac{32}{9}\left(\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab}\right) \end{aligned}$$

Bài 36. Cho a, b, c là ba số thực phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2} \geq \frac{5}{2}$$

§2. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BUNHIACÔPSKI

BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPSKI

Dạng 1: $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$

Dạng 2: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq |a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n|$

Dạng 3: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

Dấu bằng: Dạng 1, dạng 2 $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$; dạng 3 $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \geq 0$

I. ĐIỂM RƠI ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPSKI

Bài 1. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \geq 6 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$$

Bình luận và lời giải

• Sai lầm thường gặp:

$$\begin{aligned} S &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \cdot \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}} = 3 \cdot \sqrt[6]{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)} \\ &\geq 3 \cdot \sqrt[6]{2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{b^2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{c^2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{c^2 \cdot \frac{1}{a^2}}} = 3 \cdot \sqrt[6]{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{Min } S = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

$$\text{Min } S = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow a + b + c = 3 < 6 \Rightarrow \text{vô lý}$$

• Phân tích và tìm lời giải:

Xét dạng đặc biệt với $n = 2$: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \geq a_1b_1 + a_2b_2$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \geq 0$

- **Ý nghĩa:** Chuyển đổi một biểu thức ở trong căn thành một biểu thức khác ở ngoài căn. Xét đánh giá giá định với các số α, β

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2\right](\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha a + \frac{\beta}{b}\right) \quad (1)$$

$$+ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2\right](\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha b + \frac{\beta}{c}\right) \quad (2)$$

$$\sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right](\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha c + \frac{\beta}{a}\right) \quad (3)$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a+b+c) + \beta\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \right] = S_0$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $S = S_0$ tại điểm rơi $a = b = c = 2$, khi đó tất cả các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thời phải xảy ra dấu bằng tức là ta có sơ đồ điểm rơi sau:

$$\text{• Sơ đồ: } \boxed{a=b=c=2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{\frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{1}{a}} = \frac{4}{1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}}$$

Kết hợp với biến đổi theo "Kỹ thuật điểm rơi trong Côsi" ta có lời giải sau:

- **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + \frac{1}{b}\right) \\ & + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4b + \frac{1}{c}\right) \\ & \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4c + \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + 4b + 4c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{15}{4}(a+b+c) + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{15}{4} \cdot 6 + 6 \cdot \sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{b}{4} \cdot \frac{c}{4} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{45}{2} + 3 \right) = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Với $a = b = c = 2$ thì $\text{Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \geq 6 \end{cases}$ Tìm Min của $S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}}$

Bình luận và lời giải

• **Phân tích để tìm lời giải:** Xét đánh giá giả định với các số α, β

$$\sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} \right)^2 \right]} (\alpha^2 + \beta^2) \geq \alpha a + \frac{\beta}{\sqrt{b+c}} \quad (1)$$

$$+ \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c+a}} \right)^2 \right]} (\alpha^2 + \beta^2) \geq \alpha b + \frac{\beta}{\sqrt{c+a}} \quad (2)$$

$$+ \sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right]} (\alpha^2 + \beta^2) \geq \alpha c + \frac{\beta}{\sqrt{a+b}} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot S \geq \alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right)$$

$$\Leftrightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \right] = S_0$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $S = S_0$ tại điểm rơi $a = b = c = 2$, khi đó các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thời phải xảy ra dấu bằng tức là ta có sơ đồ điểm rơi sau đây:

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a=b=c=2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{\frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{1}{a}} = \frac{4}{1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}}$$

Từ đó ta có lời giải đúng sau đây:

• **Lời giải đúng:**

$$\left\{ \begin{aligned} &\sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} \right)^2 \right]} (4^2 + 1^2) \geq 4a + \frac{1}{\sqrt{b+c}} \\ &+ \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c+a}} \right)^2 \right]} (4^2 + 1^2) \geq 4b + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \\ &\sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right]} (4^2 + 1^2) \geq 4c + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{17} \cdot S \geq 4(a+b+c) + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right)$$

$$\geq 4(a+b+c) + \frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{c+a}}} \geq 4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}}$$

$$\geq 4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(a+b)+(b+c)+(c+a)]}} = 4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{6(a+b+c)}}$$

$$= \frac{31}{8}(a+b+c) + \frac{a+b+c}{8} + \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}} + \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}$$

$$\geq \frac{31}{8} \cdot 6 + 3 \cdot \sqrt{\frac{a+b+c}{8}} \cdot \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}} \cdot \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}} = \frac{93}{4} + \frac{9}{4} = \frac{51}{2}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{51}{2\sqrt{17}} = \frac{3 \cdot 17}{2 \cdot \sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}. \quad \text{Với } a=b=c=2 \text{ thì } \text{Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt[3]{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt[3]{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt[3]{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{4}}$$

Bình luận và lời giải

Sau đây là cách giải thủ công dài dòng với hình thức khủng bố nhưng vẫn dựa trên sự kết hợp ngoạn mục "**Kỹ thuật chọn điểm rơi**" của hai bất đẳng thức **Bunhiacôpski** và bất đẳng thức **Côsi**. Cách giải ngắn hơn xin dành cho bạn đọc.

Ta sẽ chứng minh: $T = \sqrt[3]{\frac{17}{4}} \cdot S = \sum \sqrt[3]{\frac{17}{4} \left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2}$

Xét đánh giá đại diện:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{17}{4} \left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} &= \sqrt[3]{\left(2^2 + \frac{1}{2^2} \right) \left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} \geq \sqrt[3]{\left(2a + \frac{1}{2b} \right)} = \sqrt[3]{\left[\left(2^2 + \frac{1}{2^2} \right) \left(2a + \frac{1}{2b} \right) \right]^2 \left(\frac{4}{17} \right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left[\left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{4}{17} \right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^4} \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Côsi* ta có:

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left[2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right]^4} + \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left[2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right]^4} + \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left[2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right]^4} + \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2} \\ &\geq 4 \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^4} \cdot \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^{12}} = 4 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{17} \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{17}{4} \left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^4} \geq \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{17} \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)} - \frac{1}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[3]{\frac{17}{4}} \cdot \sum \sqrt[3]{\left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} = \sqrt[3]{\frac{17}{4}} S \geq \sum \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^4} \geq$$

$$\geq \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{17} \left[2\sqrt{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \right]} - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2}$$

$$\geq \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{17} \left[2\sqrt{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}}} \right]} - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2}$$

$$\geq \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{17} \left[2\sqrt{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{9}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \right]} - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2}$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{17} \left[\frac{15\sqrt{2}}{8} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{\sqrt{2}}{8} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{9}{2\sqrt{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} \right]} - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2}$$

$$\geq \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{17}} \left[\frac{15\sqrt{2}}{8} \cdot 3\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} \cdot \frac{9}{2\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} \right] - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{4}} \left(\frac{45}{4} + \frac{6}{4} \right) - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} = 17 \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{4}} - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

$$\text{Do } T = \sqrt[3]{\frac{17}{4}} \cdot S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} \text{ nên } S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{4}}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2$.

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c + \sqrt{2abc} \geq 10$. Chứng minh rằng

$$S = \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4}} \geq 6\sqrt{6}$$

Giải

Dự đoán điểm rơi: $a = b = c = 2$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ra có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} \geq \frac{4}{a} + 9b + ca \\ + \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}} \geq \frac{4}{b} + 9c + ab \\ \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4}} \geq \frac{4}{c} + 9a + bc \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{24} \cdot S \geq 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 9(a+b+c) + ab + bc + ca$$

$$= \left(\frac{4}{a} + a \right) + \left(\frac{4}{b} + b \right) + \left(\frac{4}{c} + c \right) + (2a + bc) + (2b + ca) + (2c + ab) + 6(a + b + c)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4}{a}} \cdot a + 2\sqrt{\frac{4}{b}} \cdot b + 2\sqrt{\frac{4}{c}} \cdot c + 2\sqrt{abc} + 2\sqrt{abc} + 2\sqrt{abc} + 6(a + b + c)$$

$$= 12 + 6(a + b + c + \sqrt{2abc}) \geq 12 + 6 \cdot 10 = 72 \Rightarrow S \geq \frac{72}{\sqrt{24}} = 6\sqrt{6}$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ và $a\left(1+\sqrt{\frac{a}{2}}\right)+b\left(1+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)+c\left(1+\sqrt{\frac{c}{2}}\right)\geq 12$. CMR:

$$S=\sqrt{\frac{16}{a^2}+\frac{5b^2}{4}+\frac{c}{2}+\frac{19a^3}{8}}+\sqrt{\frac{16}{b^2}+\frac{5c^2}{4}+\frac{a}{2}+\frac{19b^3}{8}}+\sqrt{\frac{16}{c^2}+\frac{5a^2}{4}+\frac{b}{2}+\frac{19c^3}{8}}\geq 3\sqrt{29}$$

Giải

Dự đoán dấu bằng xảy ra tại điểm rơi: $a = b = c = 2$. Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{2+5+1+19}\cdot\sqrt{\frac{16}{a^2}+\frac{5b^2}{4}+\frac{c}{2}+\frac{19a^3}{8}}\geq\frac{8}{a}+\frac{5b}{2}+\sqrt{\frac{c}{2}}+\frac{19a}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} \\ +\sqrt{2+5+1+19}\cdot\sqrt{\frac{16}{b^2}+\frac{5c^2}{4}+\frac{a}{2}+\frac{19b^3}{8}}\geq\frac{8}{b}+\frac{5c}{2}+\sqrt{\frac{a}{2}}+\frac{19b}{2}\sqrt{\frac{b}{2}} \\ \sqrt{2+5+1+19}\cdot\sqrt{\frac{16}{c^2}+\frac{5a^2}{4}+\frac{b}{2}+\frac{19c^3}{8}}\geq\frac{8}{c}+\frac{5a}{2}+\sqrt{\frac{b}{2}}+\frac{19c}{2}\sqrt{\frac{c}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{29}\cdot S\geq\left(\frac{8}{a}+2a\right)+\left(\frac{8}{b}+2b\right)+\left(\frac{8}{c}+2c\right)+\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{a}{2}}+\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{b}{2}}+\frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{c}{2}}+\frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}\right)+9\left(a\sqrt{\frac{a}{2}}+b\sqrt{\frac{b}{2}}+c\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{8}{a}\cdot 2a}+2\sqrt{\frac{8}{b}\cdot 2b}+2\sqrt{\frac{8}{c}\cdot 2c}+\frac{1}{2}(a+b+c)+2\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}}+$$

$$+2\sqrt{\frac{b}{2}\cdot\frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{2}}}+2\sqrt{\frac{c}{2}\cdot\frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}}+9\left(a\sqrt{\frac{a}{2}}+b\sqrt{\frac{b}{2}}+c\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$$

$$=15+\frac{3}{2}(a+b+c)+6\left(a\sqrt{\frac{a}{2}}+b\sqrt{\frac{b}{2}}+c\sqrt{\frac{c}{2}}\right)+3\left[\left(2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}+1\right)+\left(2\cdot\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b}{2}}+1\right)+\left(2\cdot\frac{c}{2}\sqrt{\frac{c}{2}}+1\right)\right]$$

$$\geq 15+\frac{3}{2}(a+b+c)+6\left(a\sqrt{\frac{a}{2}}+b\sqrt{\frac{b}{2}}+c\sqrt{\frac{c}{2}}\right)+3\left(\frac{3a}{2}+\frac{3b}{2}+\frac{3c}{2}\right)$$

$$=15+6\left[a\left(1+\sqrt{\frac{a}{2}}\right)+b\left(1+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)+c\left(1+\sqrt{\frac{c}{2}}\right)\right]=15+6\cdot 12=3\cdot 29$$

Vậy $S\geq 3\cdot 29/\sqrt{29}=3\sqrt{29}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=2$.

III. ĐIỂM RƠI KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG BĐT BUNHIACÓPSKI

Bài 1. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$(x^2 + 2y^2 + 3z^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2) \geq (ax + 2by + 3cz)^2 \quad (1)$$

Chọn $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a=2b=3c \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{18}{11}, b=\frac{9}{11}, c=\frac{6}{11}$. Khi đó:

Từ (1) suy ra $\left[\left(\frac{18}{11}\right)^2 + 2\left(\frac{9}{11}\right)^2 + 3\left(\frac{6}{11}\right)^2\right] S \geq \frac{18}{11}(x+y+z)^2 = \frac{18}{11} \cdot 9 \Rightarrow S \geq 3$

Với $x=a=\frac{18}{11}, y=b=\frac{9}{11}, z=c=\frac{6}{11}$ thì $S=3$. Vậy Min $S=3$

Bài 2. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ thoả mãn $\frac{1}{2} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$A = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3 + x_4)^2 + (x_3 - 2x_4)^2 + (x_4 - 2x_1)^2$$

Giải

Tìm Max A: $(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 \leq (1 + 2\alpha + \alpha) \left(x_1^2 + \frac{2x_2^2}{\alpha} + \frac{x_3^2}{\alpha} \right)$

$$(x_2 - 2x_3 + x_4)^2 \leq (\alpha + 2\alpha + 1) \left(\frac{x_2^2}{\alpha} + \frac{2x_3^2}{\alpha} + x_4^2 \right)$$

$$(x_3 - 2x_4)^2 \leq (\alpha + 2) \left(\frac{x_3^2}{\alpha} + 2x_4^2 \right); \quad (x_4 - 2x_1)^2 \leq (\alpha + 2) \left(\frac{x_4^2}{\alpha} + 2x_1^2 \right)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = -x_4 = -\frac{x_2}{\alpha} = \frac{x_3}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{4(\alpha^2 + 1)} \leq x_1^2 \leq \frac{1}{2(\alpha^2 + 1)}$

$\Rightarrow A \leq 5(\alpha + 1)(x_1^2 + x_4^2) + 5 \cdot \frac{2\alpha + 1}{\alpha} (x_2^2 + x_3^2)$. Chọn $\alpha = \alpha_0$ với $\alpha_0 + 1 = \frac{2\alpha_0 + 1}{\alpha_0}$

$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow A \leq \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2} (x_1^2 + x_4^2) + \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2} (x_2^2 + x_3^2) \leq \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2}$

Với $x_1 = -x_4 = -\frac{2x_2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2x_3}{1 + \sqrt{5}}$ thì $\text{Max } A = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2}$.

Tìm Min A:

$$\text{Đặt } \begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 + x_4 \\ y_3 = x_3 - 2x_1 \\ y_4 = x_4 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}(3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4) \\ x_2 = -\frac{1}{5}(6y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4) \\ x_3 = -\frac{1}{5}(4y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 3y_4) \\ x_4 = -\frac{1}{5}(2y_1 + 3y_2 + y_3 + 4y_4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1^2 \leq \frac{1}{25}(3+2+4\alpha+\alpha)\left(3y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{4y_3^2}{\alpha} + \frac{y_4^2}{\alpha}\right)$$

$$x_2^2 \leq \frac{1}{25}(6+4+3\alpha+2\alpha)\left(6y_1^2 + 4y_2^2 + \frac{3y_3^2}{\alpha} + \frac{2y_4^2}{\alpha}\right)$$

$$x_3^2 \leq \frac{1}{25}(4+6+3\alpha+2\alpha)\left(4y_1^2 + 6y_2^2 + \frac{2y_3^2}{\alpha} + \frac{3y_4^2}{\alpha}\right)$$

$$x_4^2 \leq \frac{1}{25}(2+3+\alpha+4\alpha)\left(2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{y_3^2}{\alpha} + \frac{4y_4^2}{\alpha}\right). \text{ Dấu bằng } \Leftrightarrow y_1 = y_2 = \frac{y_3}{\alpha} = \frac{y_4}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq (3\alpha+5)(y_1^2 + y_2^2) + \frac{2\alpha+3}{\alpha}(y_3^2 + y_4^2). \text{ Chọn } \alpha = \alpha_0 \text{ với } 3\alpha_0 + 3 = \frac{2\alpha_0 + 3}{\alpha_0}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{7+3\sqrt{5}}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} A$$

$$\text{Vậy với } y_1 = y_2 = \frac{2y_3}{\sqrt{5}-1} = \frac{2y_4}{\sqrt{5}-1} \text{ thì Min } A = \frac{1}{7+3\sqrt{5}} = \frac{7-3\sqrt{5}}{4}$$

Bài 3. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số $A = A(n)$ nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^n (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 \leq A(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \text{ đúng } \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Giải

$$\text{Lấy } \alpha = \frac{\pi}{2n+1} \Rightarrow \sin n\alpha = \sin(n+1)\alpha. \text{ Đặt } c_i = \sin i\alpha - \sin(i-1)\alpha \quad (i = \overline{1, n})$$

$$S_k = \sum_{i=1}^k c_i = \sin k\alpha \quad (k = \overline{1, n}). \text{ Do } 0 \leq (i-1)\alpha < i\alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } c_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Sử dụng **bất đẳng thức Bunhiacôpski** ta có:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 \leq (c_1 + c_2 + \dots + c_k) \left(\frac{x_1^2}{c_1} + \frac{x_2^2}{c_2} + \dots + \frac{x_k^2}{c_k} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \sum_{k=1}^n (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 &\leq \sum_{k=1}^n \left[(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \left(\frac{x_1^2}{c_1} + \frac{x_2^2}{c_2} + \dots + \frac{x_k^2}{c_k} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[S_k \left(\frac{x_1^2}{c_1} + \frac{x_2^2}{c_2} + \dots + \frac{x_k^2}{c_k} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k + S_{k+1} + \dots + S_n}{c_k} \cdot x_k^2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{c_1} = \frac{S_2 + S_3 + \dots + S_n}{c_2} = \dots = \frac{S_n}{c_n} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_k + S_{k+1} + \dots + S_n}{c_k} &= \frac{\sin k\alpha + \sin(k+1)\alpha + \dots + \sin n\alpha}{\sin k\alpha - \sin(k-1)\alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} (\sin k\alpha + \dots + \sin n\alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha} \\ &= \frac{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha + \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k + \frac{3}{2}\right)\alpha + \dots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha} = \frac{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos \frac{\pi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{4n+2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 \leq \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{4n+2}} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

$$\text{Với } \frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2} = \dots = \frac{x_n}{c_n}, \text{ chẳng hạn } x_i = c_i \ (i = \overline{1, n}) \text{ thì } \text{Min } A = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{4n+2}}$$

Bài 4. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < 4 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \dots + \frac{k^2}{a_k} \right) \geq (1 + 2 + \dots + k)^2$$

$$\Rightarrow \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} \leq \frac{k}{(1 + 2 + \dots + k)^2} \left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \dots + \frac{k^2}{a_k} \right)$$

$$\Rightarrow S \leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{(1 + 2 + \dots + k)^2} \left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \dots + \frac{k^2}{a_k} \right) \right] = c_1 \frac{1^2}{a_1} + c_2 \frac{2^2}{a_2} + \dots + c_n \frac{n^2}{a_n}$$

$$\text{với } c_k = \frac{k}{(1+2+\dots+k)^2} + \frac{k+1}{[1+2+\dots+k+(k+1)]^2} + \dots + \frac{n}{(1+2+\dots+n)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{c_k}{4} = \frac{k}{k^2(k+1)^2} + \frac{k+1}{(k+1)^2(k+2)^2} + \dots + \frac{n}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{k+2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \dots + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \dots - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow c_k \cdot k^2 < 4 \Rightarrow S \leq c_1 \frac{1^2}{a_1} + c_2 \frac{2^2}{a_2} + \dots + c_n \frac{n^2}{a_n} < 4 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \text{ (đpcm)}$$

Bài 5. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

a. $S = a_1^2 + \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 < 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \quad (1)$

b. Hệ số 4 là đánh giá tốt nhất của bất đẳng thức (1)

(Vô địch Mỹ 1994)

Giải

a. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\left(\frac{a_1^2}{\alpha_1} + \frac{a_2^2}{\alpha_2} + \dots + \frac{a_k^2}{\alpha_k} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \right)^2 \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k^2} \left(\frac{a_1^2}{\alpha_1} + \frac{a_2^2}{\alpha_2} + \dots + \frac{a_k^2}{\alpha_k} \right)$$

$$\Rightarrow S \leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k^2} \left(\frac{a_1^2}{\alpha_1} + \frac{a_2^2}{\alpha_2} + \dots + \frac{a_k^2}{\alpha_k} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \left(c_k \frac{a_k^2}{\alpha_k} \right)$$

$$\text{với } c_k = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k^2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1}}{(k+1)^2} + \dots + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n^2}$$

$$\text{Chọn } \alpha_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \sqrt{k}; \quad \frac{1}{\alpha_k} = \sqrt{k} + \sqrt{k-1} < 2\sqrt{k} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{\sqrt{k}}{k^2} + \frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)^2} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{k\sqrt{k}} + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}} + \sqrt{k+\frac{1}{2}}} = \sqrt{k+\frac{1}{2}} - \sqrt{k-\frac{1}{2}}; \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} < k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k\sqrt{k}} < \frac{2\left(\sqrt{k+\frac{1}{2}} - \sqrt{k-\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow c_k < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{3}{2}}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right) < \frac{2}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{c_k}{\alpha_k} < \frac{2}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} \cdot 2\sqrt{k-\frac{1}{2}} = 4$$

$$\Rightarrow S \leq \sum_{k=1}^n \left(c_k \frac{a_k^2}{\alpha_k} \right) < 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \text{ (đpcm)}$$

b. Giả sử $S < (4-\alpha)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$, $0 < \alpha < 4$ (2)

$$\text{Chọn } a_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sqrt{k}$$

$$\text{Khi đó (2)} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < (4-\alpha) \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left[\frac{4-\alpha}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} - \frac{1}{k} \right] > 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2 + 2 - \alpha k}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2 k} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^4} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} > \alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} \quad (3)$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^4} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k})^4} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < \frac{5}{4}$$

$$S_2 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} < 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k})^2} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 4$$

$$S_3 = \alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} > \alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2\sqrt{k})^2} = \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Từ các đánh giá của $S_1, S_2, S_3 \Rightarrow$ bất đẳng thức (3) không xảy ra $\Rightarrow$ (đpcm)

§3. BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI VÀ KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

I. GIỚI THIỆU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

1. DẠNG NGUYÊN THỦY CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực cùng dấu và lớn hơn (-1) . Khi đó ta có:

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1+(a_1+a_2+\dots+a_n)$$

2. DẠNG CƠ BẢN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

2.1. $\forall a > -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $(1+a)^n \geq 1+na$

2.2. $\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$ và $0 \leq r \leq 1$ ta có $(1+a)^r \leq 1+ra$

2.3. $\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$ và $(r \leq 0) \cup (r \geq 1)$ ta có: $(1+a)^r \geq 1+ra$

3. DẠNG TỔNG QUÁT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

3.1. $\forall x > -1, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ta có: $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$

Hệ quả: $\forall t > 0, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ta có: $t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha)$

3.2. $\forall x > -1, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ta có: $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$

Hệ quả: $\forall t > 0, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ta có: $t^\alpha \geq \alpha t + (1-\alpha)$

Chứng minh

• Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức đúng.

Đặt $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x - 1$ với $x > -1$. Ta có $f'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1]$

Nếu $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.1. Nếu $0 < \alpha < 1$ thì ta có bảng biến thiên sau:

Nhìn bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0 \quad \forall x > -1$

$$\Leftrightarrow (1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x \quad \forall x > -1, 0 < \alpha < 1$$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$\nearrow 0 \nwarrow$	

3.2. Nếu $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < 0$ thì ta có bảng biến thiên

Nhìn bảng biến thiên suy ra $f(x) \geq 0 \quad \forall x > -1$

$$\Leftrightarrow (1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad \forall x > -1, \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha < 0 \end{cases}$$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$\searrow 0 \swarrow$	

Chú ý: Cũng có thể chứng minh các bất đẳng thức ở 3.1 và 3.2

bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy suy rộng.

II. ĐIỂM ROI ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

Các bài toán dưới đây chủ yếu xét các bất đẳng thức với số mũ vô tỉ dương là điểm hạn chế khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz mở rộng. Để nắm vững kỹ thuật này chúng ta phải xác định điều kiện xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức Bernoulli với các tình huống khác nhau. Dấu bằng xảy ra khi các biến số bằng nhau nên có thể gọi đây là

"Kỹ thuật chọn điểm roi đối xứng trong bất đẳng thức Bernoulli"

1. BẤT ĐẲNG THỨC CƠ SỞ

$$t^\alpha \geq \alpha \cdot t + (1 - \alpha) \quad \forall t > 0, \forall \alpha > 1 \Leftrightarrow t^\alpha + (\alpha - 1) \geq \alpha \cdot t \quad \forall t > 0, \forall \alpha > 1$$

$$\Rightarrow t^{\frac{\alpha}{\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \geq \frac{\alpha}{\beta} t \quad \forall t > 0, \forall \alpha > \beta > 0. \text{ Đặt } u = t^{\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow t = u^\beta \text{ khi đó:}$$

$$\boxed{u^\alpha + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \geq \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^\beta \quad \forall u > 0, \forall \alpha > \beta > 0} \quad (*) \text{. Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \boxed{u = 1}$$

2. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $x, y > 0, \alpha \geq 2$. Chứng minh rằng: $x^\alpha + y^\alpha \geq 2^{1-\alpha}(x+y)^\alpha$

Giải

$$\text{Sử dụng: } x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+y} \right)^2 + \left(\frac{y}{x+y} \right)^2 \geq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli (*) ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{2x}{x+y} \right)^\alpha + \frac{\alpha}{2} - 1 \geq \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2x}{x+y} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{2y}{x+y} \right)^\alpha + \frac{\alpha}{2} - 1 \geq \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2y}{x+y} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2^\alpha \left[\left(\frac{x}{x+y} \right)^\alpha + \left(\frac{y}{x+y} \right)^\alpha \right] + \alpha - 2 \geq 2\alpha \left[\left(\frac{x}{x+y} \right)^2 + \left(\frac{y}{x+y} \right)^2 \right] \geq \frac{2\alpha}{2} = \alpha \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+y} \right)^\alpha + \left(\frac{y}{x+y} \right)^\alpha \geq 2^{1-\alpha} \Leftrightarrow x^\alpha + y^\alpha \geq 2^{1-\alpha} (x+y)^\alpha$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = x + y + z$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (*) ta có:

$$\begin{cases} x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1) \geq \sqrt{2} x \\ y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1) \geq \sqrt{2} y \\ z^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1) \geq \sqrt{2} z \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}) + 3\sqrt{2} - 3 \geq \sqrt{2}(x + y + z)$$

$$\Rightarrow x + y + z \leq \frac{(x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}) + 3\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2}} \leq \frac{3\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$$

Với $x = y = z = 3^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}$ thì $\text{Min } S = 3 - \sqrt{2}$

Bài 3. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $a^{3\sqrt{2}} + b^{3\sqrt{2}} \geq 2^{1-\sqrt{2}} [ab(a+b)]^{\sqrt{2}}$

Giải

Sử dụng: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b)ab \Leftrightarrow \frac{a^2}{b(a+b)} + \frac{b^2}{a(a+b)} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli (*) ta có:

$$\begin{cases} \left[\sqrt{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - 1 \geq \frac{2\sqrt{2}}{2} \left[\sqrt{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^2 \\ \left[\sqrt{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - 1 \geq \frac{2\sqrt{2}}{2} \left[\sqrt{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}} \left[\frac{a^{2\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}}(a+b)^{\sqrt{2}}} + \frac{b^{2\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}(a+b)^{\sqrt{2}}} \right] + 2\sqrt{2} - 2 \geq 2\sqrt{2} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} + \frac{b^2}{a(a+b)} \right] \geq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a^{3\sqrt{2}} + b^{3\sqrt{2}} \geq 2^{1-\sqrt{2}} [ab(a+b)]^{\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b$$

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$$

Giải

• **Bổ đề:** $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (*) ta có:

$$\begin{cases} \left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(\frac{2a}{b+c}\right) \\ \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(\frac{2b}{c+a}\right) \\ \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(\frac{2c}{a+b}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}} \right] + 3(\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}} \right] + 3(\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} \right) = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}} \geq \frac{3}{2^{\sqrt{2}}} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c$$

Bài 5. Cho $a, b, c, p > 0$ và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p} \geq 3^{1-(n+p)} (a+b+c)^{n+p}$$

Giải

• **Bổ đề:** $\frac{x^n + y^n + z^n}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n$

• **Hệ quả:** $\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^n + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^n + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^n \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(3 \cdot \frac{a}{a+b+c} \right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 \geq \frac{n+p}{n} \left(3 \cdot \frac{a}{a+b+c} \right)^n \right. \\
& + \left\{ \left(3 \cdot \frac{b}{a+b+c} \right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 \geq \frac{n+p}{n} \left(3 \cdot \frac{b}{a+b+c} \right)^n \right. \\
& \left. \left(3 \cdot \frac{c}{a+b+c} \right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 \geq \frac{n+p}{n} \left(3 \cdot \frac{c}{a+b+c} \right)^n \right\} \\
\Rightarrow & 3^{n+p} \left[\left(\frac{a}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^{n+p} \right] + \frac{3p}{n} \geq \\
& \geq \frac{n+p}{n} \cdot 3^n \left[\left(\frac{a}{a+b+c} \right)^n + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^n + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^n \right] \\
& \geq \frac{n+p}{n} \cdot 3^n \cdot 3 \cdot \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} \right) \right]^n = 3 \cdot \frac{n+p}{n} = 3 + \frac{3p}{n} \\
\Rightarrow & 3^{n+p} \left[\left(\frac{a}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^{n+p} \right] \geq 3 \\
\Rightarrow & \left(\frac{a}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^{n+p} \geq 3^{1-(n+p)} \\
\Rightarrow & a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p} \geq 3^{1-(n+p)} (a+b+c)^{n+p}
\end{aligned}$$

Bài 6. Cho ΔABC . Chứng minh: $\sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C \leq 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\sqrt{2}}$

Giải

• **Bổ đề:** $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (*) ta có:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin A \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin A \right)^{\sqrt{2}} \right. \\
& + \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin B \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin B \right)^{\sqrt{2}} \right. \\
& \left. \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin C \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin C \right)^{\sqrt{2}} \right\} \\
\Rightarrow & \frac{4}{3} (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + 3\sqrt{2} - 3 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}} (\sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{4} + 3\sqrt{2} - 3 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}} \left(\sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C \right)$$

$$\Rightarrow \sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C \leq 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

Bài 7. Cho ΔABC . Chứng minh: $\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$

Giải

• **Bổ đề:** $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \quad \forall \Delta ABC$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (*) ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + (2\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) \\ & + \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + (2\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right) \\ & \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + (2\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3})^{2\sqrt{2}} \left[\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} \right] + 3(2\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3})^{2\sqrt{2}} \left[\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} \right] + 6\sqrt{2} - 3 \geq 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

Bài 8. Cho ΔABC . Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài 3 đường cao và r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{h_a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c} \right)^{\sqrt{2}} \geq 3 \left(\frac{1}{3r} \right)^{\sqrt{2}}$$

Giải

• **Bổ đề:** $\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = 1$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (*) ta có:

$$\begin{cases} \left(3r \cdot \frac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(3r \cdot \frac{1}{h_a}\right) \\ + \left(3r \cdot \frac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(3r \cdot \frac{1}{h_b}\right) \\ \left(3r \cdot \frac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(3r \cdot \frac{1}{h_c}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3r)^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}} \right] + 3\sqrt{2} - 3 \geq \sqrt{2} \cdot 3 \left(\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} \right) = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3 \left(\frac{1}{3r}\right)^{\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Bài 9. Cho ΔABC . Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài 3 đường trung tuyến và bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(\frac{1}{m_a}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_b}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_c}\right)^5}{\left(\frac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}}} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{5-\sqrt{2}}$$

Giải

• **Bổ đề:** $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2} = \frac{9}{2}$

• **Hệ quả:** $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{9}{m_a + m_b + m_c} = \frac{9}{9/2} = 2$

• **Áp dụng:** Không mất tính tổng quát giả sử $m_a \geq m_b \geq m_c$

$$\Rightarrow \frac{1}{m_a} \leq \frac{1}{m_b} \leq \frac{1}{m_c} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}} \\ \left(\frac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$\frac{\left(\frac{1}{m_a}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_b}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_c}\right)^5}{\left(\frac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}}} \geq \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}} \right] \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (*) ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_a}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{5-\sqrt{2}} + (5-\sqrt{2}) - 1 \geq (5-\sqrt{2}) \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_a}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{5-\sqrt{2}} \\ & + \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_b}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{5-\sqrt{2}} + (5-\sqrt{2}) - 1 \geq (5-\sqrt{2}) \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_b}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{5-\sqrt{2}} \\ & + \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_c}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{5-\sqrt{2}} + (5-\sqrt{2}) - 1 \geq (5-\sqrt{2}) \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_c}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{5-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3^{5-\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}} \right] \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \right)^{\sqrt{2}-5} + 12 - 3\sqrt{2} \geq 15 - 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}} \geq \frac{3}{3^{5-\sqrt{2}}} \cdot 2^{5-\sqrt{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra
$$\frac{\left(\frac{1}{m_a}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_b}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_c}\right)^5}{\left(\frac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}}} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3^{5-\sqrt{2}}} \cdot 2^{5-\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-\sqrt{2}}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{m_a} = \frac{1}{m_b} = \frac{1}{m_c} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m_a = m_b = m_c = \frac{3}{2}$

III. ĐIỂM RƠI KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG BERNOULLI

Trong các mục trước chúng ta đã xây dựng các bất đẳng thức đối xứng với lũy thừa có số mũ là số vô tỉ dương. Các bất đẳng thức này đều có dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các biến số bằng nhau. Trong mục này ta xét các bất đẳng thức không đối xứng với lũy thừa có số mũ vô tỷ dương mà khi sử dụng bất đẳng thức Bernoulli dấu bằng xảy ra khi các biến số nhận các giá trị khác nhau.

1. BẤT ĐẲNG THỨC CƠ SỞ

$$t^\alpha \geq \alpha \cdot t + (1 - \alpha) \quad \forall t > 0, \forall \alpha > 1. \text{ Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Thay } t = \frac{u}{u_0} \text{ ta có: } \left(\frac{u}{u_0} \right)^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha \cdot \frac{u}{u_0}$$

$$\Leftrightarrow u^\alpha + (\alpha - 1)u_0^\alpha \geq \alpha u_0^{\alpha-1} \cdot u \quad \text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow u = u_0 \quad (**)$$

2. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $\begin{cases} y \geq 3 \\ 3x + 2y \geq 12 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}}$

Giải

Từ giả thiết suy ra: $\frac{y}{3} \geq 1; \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq 2$. Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (**):

$$\begin{cases} x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)2^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 2^{\sqrt{2}-1} x = \sqrt{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot 2^{\sqrt{2}} \\ y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)3^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 3^{\sqrt{2}-1} y = \sqrt{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot 3^{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)(2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}}) \geq \sqrt{2} \left[2^{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \right) + (3^{\sqrt{2}} - 2^{\sqrt{2}}) \frac{y}{3} \right]$$

$$\geq \sqrt{2} (2^{\sqrt{2}} \cdot 2 + 3^{\sqrt{2}} - 2^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} (3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}) \Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} \geq 2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}}$$

$$\text{Với } x = 2, y = 3 \text{ thì } \text{Min} S = 2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}}$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} 0 < x \leq y \leq 5 \\ 5x + 3y \geq 2xy \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}}$

Giải

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } \frac{5}{y} \geq 1; \frac{5}{y} + \frac{3}{x} \geq 2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (**) ta có:

$$+ \begin{cases} 3^{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 1)x^{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3} \cdot 3 \cdot x^{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{x} \cdot x^{\sqrt{3}} \\ 5^{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 1)y^{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3} \cdot 5 \cdot y^{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} \cdot \frac{5}{y} \cdot y^{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{\sqrt{3}} + 5^{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 1)(x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}}) \geq \sqrt{3} \cdot \left[\left(\frac{5}{y} + \frac{3}{x} \right) x^{\sqrt{3}} + \frac{5}{y} (y^{\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}}) \right] \\ \geq \sqrt{3} (2x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3} (x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}}) \Rightarrow x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}} \leq 3^{\sqrt{3}} + 5^{\sqrt{3}}$$

Với $x = 3, y = 5$ thì $\text{Max} S = 3^{\sqrt{3}} + 5^{\sqrt{3}}$

Bài 3. Cho	$\begin{cases} x, y, z > 0; x \geq 4 \\ 3x + 4y \geq 24 \\ 3x + 4y + 6z \geq 36 \end{cases}$	. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}$
-------------------	--	---

Giải

Từ giả thiết suy ra: $\frac{x}{4} \geq 1; \frac{x}{4} + \frac{y}{3} \geq 2; \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \geq 3$

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (**) ta có:

$$+ \begin{cases} x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)4^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 4^{\sqrt{2}-1} \cdot x = \sqrt{2} \cdot \frac{x}{4} \cdot 4^{\sqrt{2}} \\ y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)3^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 3^{\sqrt{2}-1} \cdot y = \sqrt{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot 3^{\sqrt{2}} \\ z^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)2^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 2^{\sqrt{2}-1} \cdot z = \sqrt{2} \cdot \frac{z}{2} \cdot 2^{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)(4^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}) \geq \sqrt{2} \left(4^{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{4} + 3^{\sqrt{2}} \cdot \frac{y}{3} + 2^{\sqrt{2}} \cdot \frac{z}{2} \right) \\ = \sqrt{2} \left[\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \right) 4^{\sqrt{2}} + \left(\frac{y}{3} + \frac{z}{2} \right) (3^{\sqrt{2}} - 4^{\sqrt{2}}) + \frac{z}{2} (2^{\sqrt{2}} - 3^{\sqrt{2}}) \right] \\ \geq \sqrt{2} [3 \cdot 4^{\sqrt{2}} + 2(3^{\sqrt{2}} - 4^{\sqrt{2}}) + (2^{\sqrt{2}} - 3^{\sqrt{2}})] = \sqrt{2} (4^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}) \\ \Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} \geq 4^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}.$$

Với $x = 4, y = 3, z = 2$ thì $\text{Min} S = 4^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}$

CHƯƠNG II: CÁC SAI LẦM THƯỜNG GẶP TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ CÁC HỆ

§1. SAI LẦM THƯỜNG GẶP TRONG PHƯƠNG TRÌNH

I. DẠNG 1: $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + 3x - 2} = 0$ (*)

• Sai lầm thường gặp:

$$\frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + 3x - 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Với $x = -2$ thì mẫu thức $2x^2 + 3x - 2 = 0$ nên $x = -2$ là nghiệm ngoại lai.

• Lời giải đúng:

$$\frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + 3x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(2x-1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2x-1} = 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Bài 2. Giải phương trình: $\frac{3x}{x+2} + \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 0$ (*)

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3x(x-2) + (x+2) - 4}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Với $x = 2$ thì mẫu thức $x^2 - 4 = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3x(x-2)+(x+2)-4}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-5x-2}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+1}{x+2} = 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=0 \\ x-2 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Bài 3. Giải phương trình: $\frac{\lg(x^2 - x + 10) - 1 - \lg 4}{\log_2(3x + 2) - 2 - \log_2 5} = \lg 2$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\lg \frac{x^2 - x + 10}{40}}{\log_2 \frac{3x + 2}{20}} = \lg 2 \Leftrightarrow \lg \frac{x^2 - x + 10}{40} = \lg 2 \cdot \log_2 \frac{3x + 2}{20} \Leftrightarrow \lg \frac{x^2 - x + 10}{40} = \lg \frac{3x + 2}{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 10}{40} = \frac{3x + 2}{20} \Leftrightarrow x^2 - x + 10 = 2(3x + 2) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 6$ thì mẫu $\log_2(3x + 2) - 2 - \log_2 5 = 0$ nên $x = 6$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\lg \frac{x^2 - x + 10}{40}}{\log_2 \frac{3x + 2}{20}} = \lg 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg \frac{x^2 - x + 10}{40} = \lg 2 \cdot \log_2 \frac{3x + 2}{20} \\ \log_2 \frac{3x + 2}{20} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg \frac{x^2 - x + 10}{40} = \lg 2 \cdot \log_2 \frac{3x + 2}{20} \\ \frac{3x + 2}{20} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg \frac{x^2 - x + 10}{40} = \lg \frac{3x + 2}{20} \\ 3x + 2 \neq 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x + 10}{40} = \frac{3x + 2}{20} \\ 3x + 2 > 0; \quad x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 10 = 2(3x + 2) \\ -\frac{2}{3} < x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0 \\ -\frac{2}{3} < x \neq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 6 \\ -\frac{2}{3} < x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 4. Giải phương trình: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{2\sin 2x \cos 2x} - \frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x \cos 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x \cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} \Leftrightarrow \sin x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi; \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ thì mẫu $\sin 2x = 0$ nên $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{2\sin 2x \cos 2x} - \frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x \cos 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x \cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos 2x} = 1 \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos 2x \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases}$$

Bài 5. Giải phương trình: $\frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{2\sin x \cos x + 1} = -1$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{\sin 2x + 1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1 + (\sin 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\sqrt{2} \text{ (loại)} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ thì $\sin 2x + 1 = 0$ nên phân số

$$\frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{2\sin x \cos x + 1} \text{ không tồn tại.}$$

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{\sin 2x + 1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1 + (\sin 2x + 1) = 0 \\ \sin 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \\ \sin 2x \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin x = -\sqrt{2} \text{ (loại)} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ 2x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2m\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2m\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + 2m\pi \end{cases} \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Bài 6. Giải phương trình: $\frac{\log_2(9 - 2^x)}{3 - x} = 1 \quad (*)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \log_2(9 - 2^x) = 3 - x \Leftrightarrow 9 - 2^x = 2^{3-x} \Leftrightarrow 9 - 2^x = \frac{8}{2^x}. \text{ Đặt } t = 2^x, t > 0$$

$$(*) \Leftrightarrow 9 - t = \frac{8}{t} \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 3$ thì phân số $\frac{\log_2(9 - 2^x)}{3 - x}$ vô nghĩa, Vậy $x = 3$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (9 - 2^x) = 3 - x \\ 3 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2^x = 2^{3-x} \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2^x = \frac{8}{2^x} \\ x \neq 3 \end{cases} \text{ . Đặt } t = 2^x, t > 0$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - t = \frac{8}{t} \\ t \neq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 9t + 8 = 0 \\ t \neq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 8 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ t \neq 8 \end{cases}$$

• **BÌNH LUẬN:** $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 6} = 5$

Bài 2. Giải phương trình: $\frac{2 - 3 \sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$

Bài 3. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3} + \sin 2x + 3 \cos x}{1 + 2 \sin x} = -\sqrt{3} + \cos x$

Bài 4. Giải phương trình: $\frac{\log_3 x^2}{\log_3 (11x - 10)} = 1$

Bài 5. Giải phương trình: $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} + \sin x \cdot \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = -2$

Bài 6. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x + 2 \cos^2 x - 1}{\cos x - \cos 3x + \sin 3x - \sin x} = -2 \cos x \cos 2x$

Bài 7. Giải phương trình: $\frac{3(1 - \sin 3x)}{\sin x - \cos 2x} = 2 \cos 2x - 7$

II. DẠNG 2: $f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{x-3}{x(x-1)} - \frac{x+3}{x(x+1)} = \frac{x-6}{x-2} + \frac{x+6}{x+2} - 2$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{x-1} - \frac{x-3}{x} \right) - \left(\frac{x+3}{x} - \frac{x+3}{x+1} \right) = \frac{x-6}{x-2} + \frac{x+6}{x+2} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} - \left(\frac{x-3}{x} + \frac{x+3}{x} \right) = \frac{x-6}{x-2} + \frac{x+6}{x+2} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} - 2 = \frac{x-6}{x-2} + \frac{x+6}{x+2} - 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x-6}{x-2} + \frac{x+6}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{x-1} \right) + \left(1 + \frac{2}{x+1} \right) = \left(1 - \frac{4}{x-2} \right) + \left(1 + \frac{4}{x+2} \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = -\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow \frac{-2(x+1) + 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-4(x+2) + 4(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{x^2-1} = \frac{-16}{x^2-4} \Leftrightarrow x^2-4 = 4(x^2-1) \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x=0$ thì mẫu $x(x-1)=0$ và $x(x+1)=0$ nên $x=0$ là nghiệm ngoại lai.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{x-1} - \frac{x-3}{x} \right) - \left(\frac{x+3}{x} - \frac{x+3}{x+1} \right) = \frac{x-6}{x-2} + \frac{x+6}{x+2} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} - \left(\frac{x-3}{x} + \frac{x+3}{x} \right) = \frac{x-6}{x-2} + \frac{x+6}{x+2} - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} - 2 = \frac{x-6}{x-2} + \frac{x+6}{x+2} - 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x-6}{x-2} + \frac{x+6}{x+2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 - \frac{2}{x-1} \right) + \left(1 + \frac{2}{x+1} \right) = \left(1 - \frac{4}{x-2} \right) + \left(1 + \frac{4}{x+2} \right) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = -\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x+2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2(x+1)+2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-4(x+2)+4(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-4}{x^2-1} = \frac{-16}{x^2-4} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 = 4(x^2-1) \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 2. Giải phương trình: $\frac{2(2x^2+x-2)}{x(x-2)} + \frac{5x}{x^2+1} = 9 - 2(x+2)$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2(x^2+1)}{x} - \frac{2(x^2-4)}{x-2} + \frac{5x}{x^2+1} = 9 - 2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2+1)}{x} - 2(x+2) + \frac{5x}{x^2+1} = 9 - 2(x+2) \Leftrightarrow \frac{2(x^2+1)}{x} + \frac{5x}{x^2+1} = 9$$

Đặt $t = \frac{x^2+1}{x}$, phương trình $\Leftrightarrow 2t + \frac{5}{t} = 9 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{x}=2 \\ \frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ 2x^2-5x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x=2$ thì mẫu $x(x-2)=0$ nên $x=2$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2(x^2+1)}{x} - \frac{2(x^2-4)}{x-2} + \frac{5x}{x^2+1} = 9 - 2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(x^2+1)}{x} - 2(x+2) + \frac{5x}{x^2+1} = 9 - 2(x+2) \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(x^2+1)}{x} + \frac{5x}{x^2+1} = 9 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Đặt $t = \frac{x^2 + 1}{x}$, phương trình $\Leftrightarrow 2t + \frac{5}{t} = 9 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \\ \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \text{ (loại)} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Bài 3. Giải phương trình: $\frac{3}{\sin 2x} + \frac{2}{\sin 4x} = \cotg 2x - 2\cotg 4x + 3$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3}{\sin 2x} + 2 \cdot \left(\frac{\tg 2x + \cotg 2x}{2} \right) = \cotg 2x - 2 \cdot \left(\frac{\cotg 2x - \tg 2x}{2} \right) + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sin 2x} = 3 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ thì mẫu thức $\sin 4x = 0$ nên $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ là nghiệm ngoại lai.

• *Lêi giải ®óng:*

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3}{\sin 2x} + 2 \cdot \left(\frac{\tg 2x + \cotg 2x}{2} \right) = \cotg 2x - 2 \cdot \left(\frac{\cotg 2x - \tg 2x}{2} \right) + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sin 2x} = 3 \\ \sin 2x \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 4. Giải phương trình: $\lg(1-x) - \lg(x^2 - 3x + 2) + \lg\left(3 - \frac{5x}{3}\right) = 0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \lg(1-x) - \lg[(x-1)(x-2)] + \lg\left(3 - \frac{5x}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lg(1-x) - \lg(1-x) - \lg(2-x) + \lg\left(3 - \frac{5x}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lg(2-x) = \lg\left(3 - \frac{5x}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = 3 - \frac{5x}{3} \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = \frac{3}{2}$ thì biểu thức $\lg(1-x)$ vô nghĩa nên $x = \frac{3}{2}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \lg(1-x) - \lg[(x-1)(x-2)] + \lg\left(3 - \frac{5x}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lg(1-x) - \lg(1-x) - \lg(2-x) + \lg\left(3 - \frac{5x}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg(2-x) = \lg\left(3 - \frac{5x}{3}\right) \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = 3 - \frac{5x}{3} \\ x < 1; 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 5. Giải phương trình: $\frac{1}{\cos x (\sin x - \cos x)} = 2\sqrt{2} \sin x + \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x} \quad (*)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x (\sin x - \cos x)} - \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x} = 2\sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\cos x (\sin x - \cos x)} = 2\sqrt{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x (\sin x - \cos x)} = 2\sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\cos x (\sin x - \cos x)} = 2\sqrt{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = 2\sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ thì mẫu $\cos x (\sin x - \cos x) = 0$ nên $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x(\sin x - \cos x)} - \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x} = 2\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \frac{1 - 2\cos^2 x}{\cos x(\sin x - \cos x)} = 2\sqrt{2}\sin x \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x(\sin x - \cos x)} = 2\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\cos x(\sin x - \cos x)} = 2\sqrt{2}\sin x \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin x \\ \sin x - \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x \\ \sin x \neq \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin 2x \\ \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \\ \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \\ \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} + 2m\pi \\ x = \frac{19\pi}{12} + 2n\pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

• **BÌNH LUẬN:** Khi thêm hoặc bớt 2 vế của một phương trình với cùng một hàm số thì không khẳng định nhận được một phương trình tương đương.

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}$

Bài 2. Giải phương trình: $\frac{2}{x^2+5x} + \frac{3}{2x-10} = \frac{15}{x^2-25}$

Bài 3. Giải phương trình: $\frac{3\sin 4x + 2\sin 2x}{3\cos 4x + 2\cos 2x + 3} + 2\operatorname{tg} x = 0$

Bài 4. Giải phương trình: $2 + \lg(x^2 + 4x + 4) - \lg(x^2 + 19) = 2\lg(x + 2)$

Bài 5. Giải phương trình: $2 + \lg(x^2 + 2x) = \log_{2x} x + \log_{2x} 2$

III. DẠNG 3: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{x}{x^2+1} = \frac{x-2}{x^2-2x-1}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-2x-1} \Leftrightarrow \frac{1-x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1-x}{(x+1)(x^2-2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ x^2+1=x^2-2x-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \Leftrightarrow x=1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép biến đổi từ $\frac{x}{x^2+1} = \frac{x-2}{x^2-2x-1}$ thành $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-2x-1}$ là không tương đương, tuy rằng kết quả cuối cùng vẫn đúng.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-2x-1) = (x-2)(x^2+1) \\ x^2-2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2-x = x^3-2x^2+x-2 \\ x^2-2x-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = x-2 \\ x^2-2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Bài 2. Giải phương trình: $\frac{x+1}{1-x-x^2} = \frac{2-x}{x^2-2x+2}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x-x^2} + \frac{1}{x} = \frac{2-x}{x^2-2x+2} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x(x+1) + (1-x-x^2)}{x(1-x-x^2)} = \frac{x(2-x) + (x^2-2x+2)}{x(x^2-2x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(1-x-x^2)} = \frac{2}{x(x^2-2x+2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x-x^2) = x^2-2x+2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phương trình nhận $x = 0$ là nghiệm do biến đổi thừa điều kiện $x \neq 0$

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x^2 - 2x + 2) = (2-x)(1-x-x^2) \\ x^2 - 2x + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 = x^3 - x^2 - 3x + 2 \\ x^2 - 2x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x^2 - 2x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}\right) = \frac{|x|}{1-\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{2} \quad (*)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}} = \frac{|x|}{1-\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}} - \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} = \frac{|x|}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{|x|\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} (|x| - \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}) = \frac{|x|^2 - (1+\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-x^2})}{x(1-\sqrt{1-x^2})} + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{|x|\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} (|x| - \sqrt{x^2}) = \frac{x^2 - [1 - (1-x^2)]}{x(1-\sqrt{1-x^2})} + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1+\sqrt{1-x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow 1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 0$ thì mẫu $1-\sqrt{1-x^2} = 0$ nên $x = 0$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}} = \frac{|x|}{1-\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} - \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} = \frac{|x|}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} + \sqrt{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{|x|\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} (|x| - \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}) = \frac{|x|^2 - (1+\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-x^2})}{x(1-\sqrt{1-x^2})} + \sqrt{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{|x|\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} (|x| - \sqrt{x^2}) = \frac{x^2 - [1 - (1-x^2)]}{x(1-\sqrt{1-x^2})} + \sqrt{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{1-x^2} = 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 4. Giải phương trình: $\operatorname{tg}^2 x - \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \cos x + 1}{(1 - \sin x)(\sin x - \cos x)}$ (*)

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{2 \cos x + 1}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)} + \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{2 \cos x + 1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 - \sin^2 x}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\sin x + \cos x + \sin x \cos x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{(\sin x + \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)} \Leftrightarrow \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} \left(1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} \cdot \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \\ 1 - \sin x \neq 0; 1 + \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\pi + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2m\pi \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -\frac{\pi}{4} + 2m\pi$ thì mẫu $\sin x + \cos x = 0$ nên $x = -\frac{\pi}{4} + 2m\pi$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{2 \cos x + 1}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)} + \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{2 \cos x + 1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 - \sin^2 x}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\sin x + \cos x + \sin x \cos x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{(\sin x + \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \sin x)(\sin x + \cos x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} \\ \sin x + \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} \left(1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \right) = 0 \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} \cdot \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x} = 0 \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \\ 1 - \sin x \neq 0; 1 + \sin x \neq 0; \operatorname{tg} x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi + 2k\pi$$

• **BÌNH LUẬN:** Nếu thêm hoặc bớt 2 vế của 1 phương trình với cùng một hàm số thì ta nhận được 1 phương trình chưa chắc đã tương đương với phương trình đã cho. Để phép biến đổi không xuất hiện nghiệm ngoại lai hoặc làm mất nghiệm ta cần phải đặt điều kiện để tập xác định của phương trình không thay đổi.

IV. DẠNG 4: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}+3x-10)=x-2$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1) \cdot (\sqrt{x-1}+3x-10) = (\sqrt{x-1}-1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow [(\sqrt{x-1})^2 - 1] \cdot (\sqrt{x-1}+3x-10) = (\sqrt{x-1}-1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot (\sqrt{x-1}+3x-10) = (x-2)(\sqrt{x-1}-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[(\sqrt{x-1}+3x-10) - (\sqrt{x-1}-1)] = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Thử lại nghiệm $x=2$ thấy không thoả mãn phương trình đề bài.

• *Lời giải đúng:*

Nhận thấy $x=2$ không phải là nghiệm của phương trình đề bài, nên:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1) \cdot (\sqrt{x-1}+3x-10) = (\sqrt{x-1}-1)(x-2) \\ \sqrt{x-1}-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [(\sqrt{x-1})^2 - 1] \cdot (\sqrt{x-1}+3x-10) = (\sqrt{x-1}-1)(x-2) \\ x-1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \cdot (\sqrt{x-1}+3x-10) = (x-2)(\sqrt{x-1}-1) \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [(\sqrt{x-1}+3x-10) - (\sqrt{x-1}-1)] = 0 \Leftrightarrow 3x-9=0 \Leftrightarrow x=3$$

Bài 2. Giải phương trình: $\cos x \cos 2x = \frac{1}{4}$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x \cos 2x = \sin x \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = \sin x \Leftrightarrow \sin 4x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = x + 2k\pi \\ 4x + x = \pi + 2m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2m\pi}{5} \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Thử lại nghiệm $x = k\pi$ thấy không thoả mãn phương trình đề bài.

• Lời giải đúng:

Nhận thấy $x = k\pi$ không phải là nghiệm của phương trình đề bài, nên:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin x \cos x \cos 2x = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin 2x \cos 2x = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = x + 2k\pi \\ 4x + x = \pi + 2m\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2m\pi}{5} \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{5} + 2m\pi \\ x = \pm \frac{3\pi}{5} + 2n\pi \end{cases}$$

Bài 3. GPT: $\left[\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+x+1} \sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[3]{(x^2+1)^2} \right] (\sqrt[3]{x^2+x+1} - 2) = x$ (*)

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) \left[\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+x+1} \sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[3]{(x^2+1)^2} \right] \times \\ \times (\sqrt[3]{x^2+x+1} - 2) = (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) x$$

$$\Leftrightarrow \left[(\sqrt[3]{x^2+x+1})^3 - (\sqrt[3]{x^2+1})^3 \right] (\sqrt[3]{x^2+x+1} - 2) = (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) x$$

$$\Leftrightarrow [(x^2+x+1) - (x^2+1)] (\sqrt[3]{x^2+x+1} - 2) = (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) x$$

$$\Leftrightarrow x (\sqrt[3]{x^2+x+1} - 2) = (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) x$$

$$\Leftrightarrow x \left[(\sqrt[3]{x^2+x+1} - 2) - (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) \right] = 0 \Leftrightarrow x (\sqrt[3]{x^2+1} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt[3]{x^2+1} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Thử lại nghiệm $x = 0$ thấy không thoả mãn phương trình đề bài.

• **Lời giải đúng:**

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đề bài, nên:

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) \left[\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+x+1}\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[3]{(x^2+1)^2} \right] x \\
 &\quad \times (\sqrt[3]{x^2+x+1} - 2) = (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) x \text{ và } \sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1} \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \left[(\sqrt[3]{x^2+x+1})^3 - (\sqrt[3]{x^2+1})^3 \right] (\sqrt[3]{x^2+x+1} - 2) = (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) x \\ x^2+x+1 \neq x^2+1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x(\sqrt[3]{x^2+x+1} - 2) = (\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}) x \\ x \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+x+1} - 2 = \sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+1} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+1} = 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+1=8 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

Bài 4. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-x+1} = 4x-3$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3x+2})^2 - (\sqrt{x^2-x+1})^2 = (4x-3)(\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-x+1}) \\
 &\Leftrightarrow (x^2-3x+2) - (x^2-x+1) = (4x-3)(\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-x+1}) \\
 &\Leftrightarrow 4x-3 = (4x-3)(\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-x+1}) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3=0 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ \sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{x^2-x+1} + 1 \end{cases} \quad (I) \\
 &\quad \quad \quad \sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} = 1 \quad (2) \\
 (2) &\Leftrightarrow x^2-3x+2 = (\sqrt{x^2-x+1} + 1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = x^2-x+1 + 2\sqrt{x^2-x+1} + 1
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = (-x)^2 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \leq 0 \end{cases}. \text{ Suy ra (2) vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{3}{4}$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Thử lại nghiệm $x = \frac{3}{4}$ thấy không thoả mãn phương trình đề bài. Vậy $x = \frac{3}{4}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \frac{4x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-x+1}} &= 1 \Leftrightarrow \frac{(x^2-3x+2)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-x+1}} = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2-3x+2})^2 - (\sqrt{x^2-x+1})^2}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-x+1}} &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{x^2-x+1} + 1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = (\sqrt{x^2-x+1} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2 = x^2-x+1+2\sqrt{x^2-x+1}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} = -x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1 = (-x)^2 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \leq 0 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình vô nghiệm.}$$

• **BÌNH LUẬN:** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ giải

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 4x}$

Bài 2. Giải phương trình: $(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+10}-4) = x$

Bài 3. Giải phương trình: $(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+x^2+x-7) = x$

Bài 4. Giải phương trình: $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{\cos 15x}{8}$

$$\text{V. DẠNG 5: } f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} ?$$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt{x-2}(x^2-x+6)=0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=0 \\ x^2-x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (x-3)(x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = -2$ thì căn thức $\sqrt{x-2}$ vô nghĩa, nên $x = -2$ là nghiệm ngoại lai.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=0 \\ \begin{cases} x^2-x+6=0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} (x-3)(x+2)=0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{x(2-x)} \cdot \log_2(x^2-2)=0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(2-x)}=0 \\ \log_2(x^2-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x)=0 \\ x^2-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=2 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = 0$ thì biểu thức $\log_2(x^2-2)$ vô nghĩa, nên $x = 0$ là nghiệm ngoại lai.

Với $x = -\sqrt{3}$ thì căn thức $\sqrt{x(2-x)}$ vô nghĩa, nên $x = -\sqrt{3}$ là nghiệm ngoại lai.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(2-x)} = 0 \\ x^2 - 2 > 0 \\ \log_2(x^2 - 2) = 0 \\ x(2-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x) = 0 \\ x^2 > 2 \\ x^2 - 2 = 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 3. Giải phương trình: $(3x^2 - x - 4) \cdot \arcsin(1 - x) = 0$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 4 = 0 \\ \arcsin(1 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = \frac{4}{3} \\ 1 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{4}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -1$ thì biểu thức $\arcsin(1 - x)$ vô nghĩa, nên $x = -1$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 4 = 0 \\ -1 \leq 1 - x \leq 1 \\ \arcsin(1 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = \frac{4}{3} \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Bài 4. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+x-2}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + x - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -1$ thì căn thức $\sqrt{x^2 + x - 2}$ vô nghĩa, nên $x = -1$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 2(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + x - 2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \geq 1 \\ x \leq -2 \\ x^2 + x - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 5. Giải phương trình: $\sqrt{49 - 4x^2} \left(\sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi x}{2} \right) = 0$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 4x^2 = 0 \\ \sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ 2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2} + 3 \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ 2 \cos \frac{\pi x}{2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{3}{2} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ x = 1 + 2k (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 1 + 2k$, $k = \mathbb{Z} \setminus \{-2; -1; 0; 1\}$ thì căn thức $\sqrt{49 - 4x^2}$ vô nghĩa, nên

$x = 1 + 2k$, $k = \mathbb{Z} \setminus \{-2; -1; 0; 1\}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 4x^2 = 0 \\ \sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \\ 49 - 4x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ 2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2} + 3 \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \\ x^2 \leq \frac{49}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ 2 \cos \frac{\pi x}{2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{3}{2} \right) = 0 \\ |x| \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \\ -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ x = 1 + 2k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -\frac{7}{2} \leq 1 + 2k \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ x = 1 + 2k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -\frac{9}{4} \leq k \leq \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{7}{2} \\ x = \{-3; -1; 1; 3\} \end{cases}$$

• BÌNH LUẬN: $f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D[g(x)] \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) = 0 \\ x \in D[f(x)] \end{cases}$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Giải phương trình: $\log_3(4-x) \cdot \log_{4-2x}[(1-x)(2-x)] = \log_3(4-x)$

Bài 2. Giải phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \cdot \sqrt{\lg x + 1} = 0$

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{9-x^2}(2 \sin 2\pi x + 5 \cos \pi x) = 0$

Bài 4. Giải phương trình: $x^2 \cdot 3^{x-2} + 3^{\sqrt{x}+2} = 3^x + x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}$

Bài 5. Giải phương trình:

$$(3 + 5 \cos 2x)(2 - 4 \sin x + \sqrt{3 - 2 \cos 2x + 5 \sin x}) = 0$$

VI. DẠNG 6: $a^{\log_a f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) ?$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $8^{\log_2(x^2-8)} = (x-2)^3 \quad (*)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow (2^3)^{\log_2(x^2-8)} = (x-2)^3 \Leftrightarrow 2^{3\log_2(x^2-8)} = (x-2)^3 \Leftrightarrow [2^{\log_2(x^2-8)}]^3 = (x-2)^3$$

$$\Leftrightarrow (x^2-8)^3 = (x-2)^3 \Leftrightarrow x^2-8 = x-2 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -2$ thì biểu thức $\log_2(x^2-8)$ vô nghĩa nên $x = -2$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow (2^3)^{\log_2(x^2-8)} = (x-2)^3 \Leftrightarrow 2^{3\log_2(x^2-8)} = (x-2)^3 \Leftrightarrow [2^{\log_2(x^2-8)}]^3 = (x-2)^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-8)^3 = (x-2)^3 \\ x^2-8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8 = x-2 \\ |x| > 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6=0 \\ |x| > 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ |x| > 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình: $(4-x)^{\log_{4-x}(x^2-5x+3)} = x-2 \quad (*)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow x^2-5x+3 = x-2 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 1$ thì biểu thức $x^2-5x+3 < 0$ nên $x = 1$ là nghiệm ngoại lai.

Với $x = 5$ thì biểu thức $\log_{4-x}(x^2-5x+3)$ vô nghĩa nên $x = 5$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = x - 2 \\ x^2 - 5x + 3 > 0; 4 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x^2 - 5x + 3 > 0; x < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 5 \\ x^2 - 5x + 3 > 0; x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 3. Giải phương trình: $(x-1)^{\log_{x-1}(2x^2-4x+1)} = x-1$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 1 = x - 1 \\ 2x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x > \frac{2+\sqrt{2}}{2} \vee x < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = \frac{1}{2} \\ x > \frac{2+\sqrt{2}}{2} \vee x < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 2$ thì biểu thức $\log_{x-1}(2x^2 - 4x + 1)$ vô nghĩa nên $x = 2$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 1 = x - 1 \\ 2x^2 - 4x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0; x - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x > \frac{2+\sqrt{2}}{2} \vee x < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ x > 1; x \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = \frac{1}{2} \\ x > \frac{2+\sqrt{2}}{2} \vee x < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ x > 1; x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 4. Giải phương trình: $5^{-2\log_{0,04}(3-4x^2)} + \frac{3}{2} \cdot \log_{\frac{1}{8}} 4^x = 0$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow 5^{-2\log_{(5^{-2})}(3-4x^2)} + \frac{3}{2} \cdot \log_{(2^{-3})} 4^x = 0 \Leftrightarrow 5^{\log_5(3-4x^2)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{-3} \cdot \log_2 2^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-4x^2) - x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -1$ thì biểu thức $\log_{0,04}(3-4x^2)$ vô nghĩa, nên $x = -1$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow 5^{-2\log_{(5^{-2})}(3-4x^2)} + \frac{3}{2} \cdot \log_{(2^{-3})} 4^x = 0 \Leftrightarrow 5^{\log_5(3-4x^2)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{-3} \cdot \log_2 2^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-4x^2) - x = 0 \\ 3-4x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + x - 3 = 0 \\ x^2 \leq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Bài 5. Giải phương trình: $x \log_{x+1} 5 \log_{\sqrt[3]{5}}(x+1) = \frac{x-4}{x}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow x \log_{x+1} 5 \cdot \log_{\left(\frac{1}{5}\right)}(x+1) = \frac{x-4}{x} \Leftrightarrow (-3) \cdot x \log_{x+1} 5 \cdot \log_5(x+1) = \frac{x-4}{x}$$

$$\Leftrightarrow -3x = \frac{x-4}{x} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -\frac{4}{3}$ thì biểu thức $\log_{x+1} 5$ vô nghĩa, nên $x = -\frac{4}{3}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow x \log_{x+1} 5 \cdot \log_{\left(\frac{1}{5}\right)} (x+1) = \frac{x-4}{x} \Leftrightarrow (-3) \cdot x \log_{x+1} 5 \cdot \log_5 (x+1) = \frac{x-4}{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x = \frac{x-4}{x} \\ x+1 > 0; x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + x - 4 = 0 \\ x > -1; x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} \\ x > -1; x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 6. Giải phương trình: $x^2 \log_x 27 \log_9 x = x + 4$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow x^2 \cdot 3 \log_x 3 \cdot \frac{1}{2} \log_3 x = x + 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2} x^2 \cdot \log_x 3 \cdot \log_3 x = x + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} x^2 = x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -\frac{4}{3}$ thì biểu thức $\log_x 27$ và $\log_9 x$ vô nghĩa, nên $x = -\frac{4}{3}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow x^2 \cdot 3 \log_x 3 \cdot \frac{1}{2} \log_3 x = x + 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2} x^2 \cdot \log_x 3 \cdot \log_3 x = x + 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} x^2 = x + 4 \\ x > 0; x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 8 = 0 \\ x > 0; x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \\ x > 0; x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

• **BÌNH LUẬN:** $a^{\log_a f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad (0 < a \neq 1)$

$$u(x)^{\log_{u(x)} f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0; u(x) > 0; u(x) \neq 1 \end{cases}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 7. Giải phương trình: $2^{\log_2(x^2-4x+3)} = x - 3$

Bài 8. Giải phương trình: $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$

VII. DẠNG 7: CÔNG THỨC BIỂU DIỄN CHỨA tg , cotg , $\frac{1}{\cos}$, $\frac{1}{\sin}$?

Bài 1. Giải phương trình: $\sin x(1 + \text{tg}^2 x) + \text{tg}^2 x = 1$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \sin x(1 + \text{tg}^2 x) = 1 - \text{tg}^2 x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} \Leftrightarrow \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ thì $\cos x = 0$ suy ra $\text{tg} x$ vô nghĩa, nên $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \sin x(1 + \text{tg}^2 x) = 1 - \text{tg}^2 x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 - 2\sin^2 x \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình: $\sin x(1 + \cot^2 x) = 2 \cot x$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \sin x = \frac{2 \cot x}{1 + \cot^2 x} \Leftrightarrow \sin x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = k\pi$ thì $\sin x = 0$ suy ra $\cot x$ vô nghĩa, nên $x = k\pi$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \sin x = \frac{2 \cot x}{1 + \cot^2 x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \sin x \cos x \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi$$

Bài 3. Giải phương trình: $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = 1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x - 2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ thì $\cos 2x = 0$ suy ra $\operatorname{tg} 2x$ vô nghĩa, nên nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}(3x - 2x) = 1 \\ \cos 2x \neq 0; \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \cos 2x \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 4. Giải phương trình: $\frac{\cotg 4x}{\sin^2 x} + \frac{\cotg x}{\sin^2 4x} = 0$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{\cotg 4x \sin^2 4x + \cotg x \sin^2 x}{\sin^2 x \sin^2 4x} = 0 \Leftrightarrow \cotg 4x \sin^2 4x + \cotg x \sin^2 x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos 4x \sin 4x + \cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 8x + \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 8x + \sin 2x}{2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sin 5x \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = k\pi \\ 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = \frac{k\pi}{5}$, $k = 5m, m \in \mathbb{Z}$ thì $\cotg 4x$ và $\cotg x$ vô nghĩa nên

$x = \frac{k\pi}{5}$, $k = 5m, m \in \mathbb{Z}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{\cotg 4x \sin^2 4x + \cotg x \sin^2 x}{\sin^2 x \sin^2 4x} = 0 \Leftrightarrow \cotg 4x \sin^2 4x + \cotg x \sin^2 x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x \sin 4x + \cos x \sin x = 0 \\ \sin x \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 8x + \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \\ \sin x \sin 4x \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin 8x + \sin 2x}{2} = 0 \\ \sin x \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x \cos 3x = 0 \\ \sin x \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 0 \\ \cos 3x = 0 \\ \sin x \sin 4x \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = k\pi \\ 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \\ 4x \neq m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq k\pi \\ x \neq \frac{m\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{5} \quad k \neq 5m \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

• **BÌNH LUẬN:** Trong phép biến đổi các biểu thức chứa $\tg x$ hoặc $\cotg x$ cần đặt thêm điều kiện $\sin x \neq 0$ hoặc $\cos x \neq 0$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 5. Giải phương trình:
$$\frac{(\operatorname{tg}^2 x + 1)(\operatorname{tg}^2 2x + 1)}{(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x)} = 2$$

Bài 6. Giải phương trình:
$$1 + \operatorname{cotg} 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$$

Bài 7. Giải phương trình:
$$\frac{3(\cos 2x + \operatorname{cotg} 2x)}{\operatorname{cotg} 2x - \cos 2x} - 2(\sin 2x + 1) = 0$$

Bài 8. Giải phương trình:
$$\sin^4 x + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1 + 3\cos^2 x \sin^4 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

Bài 9. Giải phương trình:
$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0$$

Bài 10. Giải phương trình:
$$\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \operatorname{tg}^2 x = 1$$

Bài 11. Giải phương trình:
$$\operatorname{tg}\left(2x + \frac{5\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{cotg} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{cotg} \frac{13\pi}{6}$$

Bài 12. Giải phương trình:
$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cotg} 4x + 3 \operatorname{cotg} 2x$$

Bài 13. Giải phương trình:
$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} - 5 \operatorname{cotg} x$$

Bài 14. Giải phương trình:
$$\operatorname{cotg} \frac{11\pi}{6} = \frac{2 \operatorname{cotg} x + 3}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

Bài 15. Giải phương trình:
$$(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + 2 \operatorname{tg} x)(1 + \cos 3x) = 4 \sin 3x$$

Bài 16. Giải phương trình:
$$2(1 - \cos 2x) = \operatorname{tg} x$$

Bài 17. Giải phương trình:
$$\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{8}{3} \operatorname{cotg} x$$

Bài 18. Giải phương trình:
$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x$$

Bài 19. Giải phương trình:
$$\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 3x + \operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 5x$$

Bài 20. Giải phương trình:
$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 2x + \operatorname{cotg} 3x = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{cotg}^2 2x \operatorname{cotg} 3x$$

VIII. DẠNG 8: $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$ (1)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2})^3 = (\sqrt[3]{2x-3})^3$$

$$\Leftrightarrow (x-1) + (x-2) + 3 \cdot \sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{x-2} (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 2x-3 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 + 3 \cdot \sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{x-2} \sqrt[3]{2x-3} = 2x-3 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{x-2} \sqrt[3]{2x-3} = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2 \vee x=\frac{3}{2}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép thế $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$ từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả, không phải là phép biến đổi tương đương.

• **Lời giải đúng:**

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2})^3 = (\sqrt[3]{2x-3})^3$$

$$\Leftrightarrow (x-1) + (x-2) + 3 \cdot \sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{x-2} (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 2x-3$$

$$\Rightarrow 2x-3 + 3 \cdot \sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{x-2} \sqrt[3]{2x-3} = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{x-2} \sqrt[3]{2x-3} = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2 \vee x=\frac{3}{2}$$

Thử lại: Thay $x=1$; $x=2$; $x=\frac{3}{2}$ vào (1) thấy thoả mãn

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$ (1)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1})^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) + (x-1) + 3 \cdot \sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{x-1} (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 1 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 3x-2 + 3 \cdot \sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{x-1} \cdot 1 = 1 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}=1-x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1})^3=(1-x)^3 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1)=(1-x)^3$$

$$\Leftrightarrow (1-x)[(x-1)^2+(2x-1)]=0 \Leftrightarrow x^2(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép thế $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$ từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả, không phải là phép biến đổi tương đương, nên xuất hiện nghiệm ngoại lai $x = 0$.

• **Lời giải đúng:**

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1})^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) + (x-1) + 3 \cdot \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow 3x-2+3 \cdot \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1} = 1-x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1})^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) = (1-x)^3$$

$$\Leftrightarrow (1-x)[(x-1)^2+(2x-1)]=0 \Leftrightarrow x^2(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Thử lại: Thay $x = 0$; $x = 1$ vào (1) thấy $x = 0$ không thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1} = x \cdot \sqrt[3]{16} \quad (1)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1})^3 = (x \sqrt[3]{16})^3$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) + (2x+1) + 3 \cdot \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{2x+1}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1}) = 16x^3 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3 \cdot \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{2x+1} \cdot x \sqrt[3]{16} = 16x^3 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt[3]{4x^2-1} \cdot x \sqrt[3]{16} = 4x(4x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt[3]{4x^2-1} \left[4 \sqrt[3]{(4x^2-1)^2} - 3 \sqrt[3]{16} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt[3]{4x^2-1}=0 \\ 4 \sqrt[3]{(4x^2-1)^2} - 3 \sqrt[3]{16} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm \frac{1}{2} \vee x=\pm \frac{\sqrt{4+6\sqrt{3}}}{4}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép thế $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1} = x\sqrt[3]{16}$ từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả, không phải là phép biến đổi tương đương.

• **Lời giải đúng:**

Sửa và bổ sung cho lời giải trên như sau:

Từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả (thay dấu $\Leftrightarrow$ bằng dấu $\Rightarrow$)

Thử lại các nghiệm tìm được xem có nghiệm ngoại lai hay không.

Kết quả thử lại: các nghiệm $x=0 \vee x=\pm \frac{1}{2} \vee x=\pm \frac{\sqrt{4+6\sqrt{3}}}{4}$ thoả mãn (1)

Bài 4. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$ (1)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1})^3 = (\sqrt[3]{3x+1})^3$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) + (x-1) + 3 \cdot \sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{x-1} (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 3x+1 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 3x-2 + 3 \cdot \sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} = 3x+1 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{3x+1})^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x-1)(3x+1)^3 = 1 \Leftrightarrow 6x^3 - 7x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{7}{6}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép thế $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$ từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả, không phải là phép biến đổi tương đương, nên xuất hiện nghiệm ngoại lai $x=0$.

• **Lời giải đúng:**

Sửa và bổ sung cho lời giải trên như sau:

Từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả (thay dấu $\Leftrightarrow$ bằng dấu $\Rightarrow$)

Thử lại các nghiệm tìm được xem có nghiệm ngoại lai hay không.

Kết quả thử lại: nghiệm $x=0$ không thoả mãn (1), nghĩa là $x=0$ là nghiệm ngoại lai. Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{7}{6}$

Bài 5. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{x^2-2x+1} = 2$ (1)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} + \sqrt{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} + \sqrt{|x-1|} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{|x-1|})^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow x+7+|x-1|+3 \cdot \sqrt[3]{x+7} \cdot \sqrt{|x-1|} (\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{|x-1|}) = 8 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x+7+|x-1|+3 \cdot \sqrt[3]{x+7} \cdot \sqrt{|x-1|} \cdot 2 = 8 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow x-1+|x-1|+3 \cdot \sqrt[3]{x+7} \cdot \sqrt{|x-1|} \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-1+|x-1|+6 \cdot \sqrt[3]{x+7} \cdot \sqrt{|x-1|} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 6 \cdot \sqrt[3]{x+7} \cdot \sqrt{|x-1|} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -7 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép thế $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{|x-1|} = 2$ từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả, không phải là phép biến đổi tương đương.

• **Lời giải đúng:**

Sửa và bổ sung cho lời giải trên như sau:

Từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả (thay dấu $\Leftrightarrow$ bằng dấu $\Rightarrow$)

Thử lại các nghiệm tìm được xem có nghiệm ngoại lai hay không.

Kết quả thử lại: nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ x = -7 \end{cases}$ đều thỏa mãn (1)

• **BÌNH LUẬN:** $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow [\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}]^3 = [\sqrt[3]{h(x)}]^3$$

$$\Leftrightarrow f(x) + g(x) + 3 \cdot \sqrt[3]{f(x)} \sqrt[3]{g(x)} (\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}) = h(x) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) + g(x) + 3 \cdot \sqrt[3]{f(x)} \sqrt[3]{g(x)} \sqrt[3]{h(x)} = h(x) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt[3]{f(x)}]^3 + [\sqrt[3]{g(x)}]^3 + [\sqrt[3]{-h(x)}]^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{f(x)} \sqrt[3]{g(x)} \sqrt[3]{-h(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{-h}) \left[(\sqrt[3]{f})^2 + (\sqrt[3]{g})^2 + (\sqrt[3]{-h})^2 - \sqrt[3]{f} \sqrt[3]{g} - \sqrt[3]{g} \sqrt[3]{-h} - \sqrt[3]{-h} \sqrt[3]{f} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{-h}) \left[(\sqrt[3]{f} - \sqrt[3]{g})^2 + (\sqrt[3]{g} - \sqrt[3]{-h})^2 + (\sqrt[3]{-h} - \sqrt[3]{f})^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{-h} = 0 \\ (\sqrt[3]{f} - \sqrt[3]{g})^2 + (\sqrt[3]{g} - \sqrt[3]{-h})^2 + (\sqrt[3]{-h} - \sqrt[3]{f})^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} - \sqrt[3]{h} = 0 \\ \sqrt[3]{f} = \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{-h} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{h} & (1) \\ f = g = -h & (4) \end{cases} \quad (I)$$

Nhận xét: Do (3) $\Leftrightarrow (I) = (1) \cup (4)$, nên phép thế $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$ từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả, tức là tập nghiệm của (1) $\subset$ tập nghiệm (I).

Nếu $f = g = -h$ vô nghiệm hoặc tập nghiệm của (4) $\subset$ tập nghiệm (1) thì (1) $\Leftrightarrow (I)$

Nghiệm x_0 của $f = g = -h$ không thỏa mãn (1) chính là nghiệm ngoại lai.

Kết luận: Phương pháp chung giải phương trình dạng $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$

+ Thực hiện các phép biến đổi trên với chú ý phép thế từ (2) sang (3)

$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$ là phép biến đổi hệ quả (dấu $\Rightarrow$).

+ Nghiệm tìm được cần kiểm tra vào phương trình $f(x) = g(x) = -h(x)$.

– Nếu phương trình này vô nghiệm thì không có nghiệm ngoại lai.

– Nếu phương trình $f(x) = g(x) = -h(x)$ có nghiệm thì cần phải thử trực

tiếp nghiệm này vào phương trình $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$

♦ **Dạng mở rộng:** $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)} + \sqrt[3]{r(x)}$

Bài mẫu 1. $\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1} = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} \quad (1)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1})^3 = (\sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1})^3$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x^2 - x + 1) + (x^2 + x + 1) + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \sqrt[3]{x^2 + x + 1} (\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1}) \\
&= (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1) + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} (\sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1}) \quad (2) \\
&\Leftrightarrow 2x^2 + 2 + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \sqrt[3]{x^2 + x + 1} (\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1}) = \\
&= 2x^2 + 2 + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} (\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1}) \quad (3) \\
&\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \sqrt[3]{x^2 + x + 1} (\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1}) = \\
&= \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} (\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1}) \\
&\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1}) (\sqrt[3]{x^2 - x + 1} \sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1} = 0 \\ \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = -(x^2 + x + 1) \\ (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2 = 0 \\ (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow -x^2 = -4x^2 \Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép thế $\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 1} = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1}$ từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả, không phải là phép biến đổi tương đương.

• **Lời giải đúng:**

Sửa và bổ sung cho lời giải trên như sau:

Từ (2) sang (3) là phép biến đổi hệ quả (thay dấu $\Leftrightarrow$ bằng dấu $\Rightarrow$)

Thử lại các nghiệm tìm được xem có nghiệm ngoại lai hay không.

Kết quả thử lại: nghiệm $x = 0$ thoả mãn (1).

$$\text{IX. DẠNG 9: } \sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} ; \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} ?$$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt{(x+1)(x^2-x-2)} = x+1$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)[(x+1)(x-2)]} = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2(x-2)} = x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Phương trình nhận $x = -1$ là nghiệm, nghĩa là cách giải trên đã làm mất nghiệm $x = -1$.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)[(x+1)(x-2)]} = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2(x-2)} = x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ |x+1|\sqrt{x-2}=x+1 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt{x-2}=\pm 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt{x-2}=1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x-3}{x+1}} = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x^2+3x-7}$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} = \frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{x^2+3x-7} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{(x+1)}\sqrt{x-3}}{x^2+3x-7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-3}\{(x^2-x-7)-[\sqrt{(x+1)}]^2\}}{\sqrt{x+1}(x^2+3x-7)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-3}(x^2-2x-8)}{\sqrt{x+1}(x^2+3x-7)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}=0 \\ x^2+2x-8=0 \\ x+1>0; x^2+3x-7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-4 \\ x=2 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x=2$ thì căn thức $\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$ vô nghĩa, nên $x=2$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} = \frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{x^2+3x-7} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} \cdot \frac{\{(x^2-x-7)-[\sqrt{(x+1)}]^2\}}{(x^2+3x-7)}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} \cdot \frac{x^2-2x-8}{x^2+3x-7}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}=0 \\ x^2+2x-8=0 \\ \frac{x-3}{x+1} \geq 0; x^2+3x-7 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-4 \vee x=2 \\ \frac{x-3}{x+1} \geq 0; x^2+3x-7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-4 \end{cases}$$

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{(x+4)^2(x-5)}=x+4$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+4)^2(x-5)}=x+4 \\ x+4 \geq 0; x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)\sqrt{x-5}=x+4 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(\sqrt{x-5}-1)=0 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ \sqrt{x-5}=1 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \text{ (loại)} \\ x-5=1 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=6$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phương trình nhận $x = -4$ là nghiệm, nghĩa là cách giải trên đã làm mất nghiệm $x = -4$.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+4)^2(x-5)} = x+4 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)\sqrt{x-5} = x+4 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(\sqrt{x-5}-1) = 0 \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ \sqrt{x-5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=6 \end{cases}$$

Bài 4. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2-9} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(x+3)} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3}\sqrt{x+3} = (x+5)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\left(2\sqrt{x-3} - \frac{x+5}{\sqrt{x-3}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} \cdot [2(\sqrt{x-3})^2 - (x+5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} \cdot [2(x-3) - (x+5)] = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} \cdot (x-11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-11=0 \\ x+3=0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=-3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=11.$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phương trình nhận $x = -3$ là nghiệm, nghĩa là cách giải trên đã làm mất nghiệm $x = -3$.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(x+3)} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x+3}{x-3} \cdot (x-3)^2} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \cdot |x-3| = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \cdot [2|x-3| - (x+5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{x-3} = 0 \\ 2|x-3| - (x+5) = 0 \\ \frac{x+3}{x-3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \begin{cases} 2(x-3) - (x+5) = 0; x-3 \geq 0 \\ 2(3-x) - (x+5) = 0; x-3 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3 \\ x \leq -3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \begin{cases} x - 11 = 0; x \geq 3 \\ 1 - 3x = 0; x \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3 \\ x \leq -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 11 \end{cases}$$

• BÌNH LUẬN:

$$\sqrt{A \cdot B} = \begin{cases} \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} & \text{nếu } A, B \geq 0 \\ \sqrt{-A} \cdot \sqrt{-B} & \text{nếu } A, B \leq 0 \end{cases}; \quad \sqrt{\frac{A}{B}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} & \text{nếu } A \geq 0; B > 0 \\ \frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{-B}} & \text{nếu } A \leq 0; B < 0 \end{cases}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 5. Giải phương trình: $3\sqrt{x^2 - 25} = (2x - 1)\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}$

Bài 6. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2 - x - 6} = (x + 5)\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$

Bài 7. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = (3x - 7)\sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}$

Bài 8. Giải phương trình: $\sqrt{(3x-1)(3x^2 - 4x + 1)} = x - 1$

Bài 9. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2x^2 - 5x - 1}$

Bài 10. Giải phương trình: $\sqrt{(2x-3)(2x^2 - x - 3)} = x + 1$

$$\text{X. DẠNG 10: } \sqrt{A \cdot B} = \sqrt{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{B} = \sqrt{C} \\ A = 0 \end{cases} ?$$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt{2x^3 - 3x} = \sqrt{x^2 - 2x}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x(2x^2 - 3)} = \sqrt{x(x - 2)} \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{x}\sqrt{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{2x^2 - 3} - \sqrt{x - 2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{2x^2 - 3} - \sqrt{x - 2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3 = x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - x - 1 = 0; x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép biến đổi phương trình sau không phải là phép biến đổi tương đương.

$$\sqrt{x(2x^2 - 3)} = \sqrt{x(x - 2)} \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{x}\sqrt{x - 2}$$

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x(2x^2 - 3)} = \sqrt{x(x - 2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} 2x^2 - 3 = x - 2 \\ x(x - 2) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$ (1)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Với (2) thì (1)} \Leftrightarrow \sqrt{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos x + \sin x} [\sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos x + \sin x} = 0 \\ \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos x \\ \cos x = 1; \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = 2k\pi \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép biến đổi trong hệ điều kiện sau không phải là biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases}$$

• **Lời giải đúng:**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét: } \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ thỏa mãn (1)}$$

Xét: $\cos x + \sin x > 0$ khi đó biến đổi hệ điều kiện ta có:

$$\begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x \geq 0 \\ \cos x + \sin x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \sqrt{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos x + \sin x} [\sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} = 2 \Leftrightarrow \cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 2\cos^2 x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$

Kết luận: Từ 2 khả năng đã xét suy ra: (1) $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = 2k\pi$

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{(x-2) \cdot \log_3(3^{2x+1} + 6)} = \sqrt{x^2 - 4}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2) \log_3 [3 \cdot (3^x)^2 + 6]} = \sqrt{(x-2)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} \sqrt{\log_3 [3 \cdot (3^x)^2 + 6]} = \sqrt{x-2} \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} \left(\sqrt{\log_3 [3 \cdot (3^x)^2 + 6]} - \sqrt{x+2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ \sqrt{\log_3 [3 \cdot (3^x)^2 + 6]} - \sqrt{x+2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \log_3 [3 \cdot (3^x)^2 + 6] = x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3 \cdot (3^x)^2 + 6 = 3^{x+2}; x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3 \cdot (3^x)^2 - 9 \cdot 3^x + 6 = 0; x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} 3^x = 2 \\ 3^x = 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x = \log_3 2 \\ x = 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x = \log_3 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $\begin{cases} x = \log_3 2 \\ x = 0 \end{cases}$ thì căn thức $\sqrt{x^2 - 4}$ vô nghĩa nên $\begin{cases} x = \log_3 2 \\ x = 0 \end{cases}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2) \log_3 [3 \cdot (3^x)^2 + 6]} = \sqrt{(x-2)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \log_3 [3 \cdot (3^x)^2 + 6] = x+2 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3 \cdot (3^x)^2 + 6 = 3^{x+2} \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3 \cdot (3^x)^2 + 6 = 3^{x+2} \\ x \geq 2 \vee x \leq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3 \cdot (3^x)^2 - 9 \cdot 3^x + 6 = 0 \\ x \geq 2 \vee x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3^x = 2 \vee 3^x = 1 \\ x \geq 2 \vee x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x = \log_3 2 \vee x = 0 \\ x \geq 2 \vee x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Bài 4. Giải phương trình: $\sqrt{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}} = \sqrt{x-2} \quad (*)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)} \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \log_3 x \cdot \ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \log_3 x = 0 \\ \ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x-\frac{1}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$ thì căn thức $\sqrt{x-2}$ vô nghĩa nên $\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = 1 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \log_3 x \cdot \ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} \log_3 x = 0 \\ \ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x-\frac{1}{2}=1 \end{cases} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

BÌNH LUẬN: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=C \\ A \neq 0; A \cdot B \geq 0 \end{cases}$

$$\text{XI. DẠNG 11: } \log_a f^2(x) f^2(x) = 2 \log_a f(x) \quad ?$$

$$\log_a [f(x) \cdot g(x)] = \log_a f(x) + \log_a g(x) \quad ?$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x) \quad ?$$

$$\log_a u(x) \log_{u(x)} f(x) = \log_a f(x) \quad ?$$

Bài 1. Giải phương trình: $2 \log_3 (x-2) + \log_3 (x-4)^2 = 0 \quad (*)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow 2 \log_3 (x-2) + 2 \log_3 (x-4) = 0 \Leftrightarrow \log_3 (x-2) + \log_3 (x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [(x-2)(x-4)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4) = 1 \\ x-4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 7 = 0 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{2} \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{2}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 3$ thì $(*)$ nghiệm đúng, nên $x = 3$ là nghiệm của $(*)$.

Cách giải trên đã làm mất nghiệm của phương trình.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow 2 \log_3 (x-2) + 2 \log_3 |x-4| = 0 \Leftrightarrow \log_3 (x-2) + \log_3 |x-4| = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [(x-2)|x-4|] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)|x-4| = 1 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-2)(x-4) = 1 \\ x > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)(x-4) = -1 \\ 2 < x < 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 6x + 7 = 0 \\ x > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ 2 < x < 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{2} \\ x > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ 2 < x < 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình: $\lg[x(x+9)] + \lg \frac{x+9}{x} = 0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \lg \left[x(x+9) \cdot \frac{x+9}{x} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg[(x+9)^2] = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)^2 = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 18x + 80 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = -10 \end{cases}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = -8$ thì biểu thức $\lg[x(x+9)]$ và $\lg \frac{x+9}{x}$ vô nghĩa, nên $x = -8$ là nghiệm ngoại lai.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg \left[x(x+9) \cdot \frac{x+9}{x} \right] = 0 \\ x(x+9) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg[(x+9)^2] = 0 \\ x > 0 \vee x < -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)^2 = 1 \\ x > 0 \vee x < -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 18x + 80 = 0 \\ x > 0 \vee x < -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \vee x = -10 \\ x > 0 \vee x < -9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -10$$

Bài 3. Giải phương trình: $\log_{x-4}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x-4) = 3$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \log_{x-1}(x^3 - 9x + 8) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 9x + 8 = (x-1)^3 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = 3$ thì biểu thức $\log_{x-4}(x^3 - 9x + 8)$ và $\log_{x-1}(x-4)$ vô nghĩa, nên $x = 3$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x-1}(x^3 - 9x + 8) = 3 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 9x + 8 = (x-1)^3 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 3 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 4. Giải phương trình: $\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 2 \log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 3 = 3 \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3 \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} 4(x+2) = \log_{\frac{1}{4}} [(4-x)(x+6)] \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) = (4-x)(x+6) \\ 4(x+2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+8 = -x^2 - 2x + 24 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x - 16 = 0 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8 \Leftrightarrow x = 2 \\ x > -2 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 1 - \sqrt{33}$ thì (*) nghiệm đúng nên cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 2 \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3 = 3 \cdot \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3 \cdot \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(4|x+2|) = \log_{\frac{1}{4}}[(4-x)(x+6)] \Leftrightarrow 4|x+2| = (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+8=-x^2-2x+24 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-16=0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ x=-8 \end{cases} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1-\sqrt{33} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x-8=-x^2-2x+24 \\ x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-32=0 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \pm \sqrt{33} \\ x \leq -2 \end{cases} \end{cases}$$

Bài 5. Giải phương trình:

$$\frac{1}{3} \log_2 (3x-4)^6 \cdot \log_2 x^3 = 8 (\log_2 \sqrt{x})^2 + [\log_2 (3x-4)^2]^2 \quad (*)$$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{3} [6 \log_2 (3x-4)] (3 \log_2 x) = 8 \left(\frac{1}{2} \log_2 x \right)^2 + [2 \log_2 (3x-4)]^2$$

$$\Leftrightarrow 6 \log_2 (3x-4) \cdot \log_2 x = 2 \log_2^2 x + 4 \log_2^2 (3x-4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 (3x-4) \cdot \log_2 x + 2 \log_2^2 (3x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow [\log_2 x - \log_2 (3x-4)] [\log_2 x - 2 \log_2 (3x-4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - \log_2 (3x-4) = 0 \\ \log_2 x - 2 \log_2 (3x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \log_2 (3x-4) \\ \log_2 x = \log_2 (3x-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x-4 > 0 \\ x = (3x-4)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 9x^2 - 25x + 16 = 0; x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = \frac{16}{9} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép biến đổi từ $\log_2 (3x-4)^6$ thành $6 \cdot \log_2 (3x-4)$ và từ $\log_2 (3x-4)^2$ thành $2 \log_2 (3x-4)$ là các phép biến đổi không tương đương.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot (6 \log_2 |3x-4|) \cdot (3 \log_2 x) = 8 \left(\frac{1}{2} \log_2 x \right)^2 + (2 \log_2 |3x-4|)^2$$

$$\Leftrightarrow 6 \log_2 |3x-4| \cdot \log_2 x = 2 \log_2^2 x + 4 \log_2^2 |3x-4|$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 |3x-4| \cdot \log_2 x + 2 \log_2^2 |3x-4| = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - \log_2 |3x-4|)(\log_2 x - 2 \log_2 |3x-4|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - \log_2 |3x-4| = 0 \\ \log_2 x - 2 \log_2 |3x-4| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \log_2 |3x-4| \\ \log_2 x = \log_2 |3x-4|^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = |3x-4| > 0 \\ x = |3x-4|^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x-4 > 0 \\ x = 4-3x > 0 \\ 9x^2 - 25x + 16 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 1 \\ x = \frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = \frac{16}{9} \end{cases}$$

BÌNH LUẬN: $\log_a f^2(x) = 2 \log_a |f(x)|$

$$\log_a [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \log_a f(x) + \log_a g(x) \\ f(x) > 0; g(x) > 0 \\ \log_a [-f(x)] + \log_a [-g(x)] \\ f(x) < 0; g(x) < 0 \end{cases} \quad (f(x) \cdot g(x) > 0)$$

$$\log_a u(x) \log_{u(x)} f(x) = \log_a f(x) \text{ nếu } 0 < u(x) \neq 1$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 6. Giải phương trình: $\log_{3x} x^3 + \log_{\frac{x}{3}} x = 0$

Bài 7. Giải phương trình: $20 \log_{4x} \sqrt{x} + 7 \log_{16x} x^3 - 3 \log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0$

Bài 8. Giải phương trình: $2 \log_8 (2x) + \log_8 (x^2 - 2x + 1) = \frac{4}{3}$

Bài 9. Giải phương trình: $\log_5 (3x - 11) + \log_5 (x - 27) = 3 + \log_5 8$

Bài 10. Giải phương trình: $\log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$

Bài 11. Giải phương trình: $\lg [x(x+9)] + \lg \frac{x+9}{x} = 0$

XII. DẠNG 12: $\varphi[f(x)] = \varphi[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = g(x) ?$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 2} = \sqrt{3x - 10} \quad (*)$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 3x - 10 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = 3$ thì căn thức $\sqrt{3x - 10}$ vô nghĩa nên $x = 3$ là nghiệm ngoại lai.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 3x - 10 \\ 3x - 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ 3x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases} \\ x \geq \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 2. Giải phương trình: $\log_2 \operatorname{tg} x = 1 + \log_2 \sin 2x \quad (*)$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \log_2 \operatorname{tg} x = \log_2 (2 \sin 2x) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x \left(1 - \frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x - 3}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg}^2 x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} = 0 \\ \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + m\pi \Leftrightarrow x = \frac{p\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} + n\pi \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = k\pi$ thì $\operatorname{tg} x = 0$ suy ra $\log_2 \operatorname{tg} x$ vô nghĩa, nên $x = k\pi$ là nghiệm ngoại lai.

Với $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ thì $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ suy ra $\log_2 \sin 2x$ vô nghĩa, nên $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \log_2 \operatorname{tg} x = \log_2 (2 \sin 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 2 \sin 2x \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \left(1 - \frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right) = 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x - 3}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg}^2 x = 3 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + m\pi$$

Bài 3. Giải phương trình: $\arcsin(x^2 - 3x) = \arcsin(2x - 4)$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - 3x = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$ thì biểu thức $\arcsin(2x - 4)$ vô nghĩa, nên $\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 2x - 4 \\ |2x - 4| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ -1 \leq 2x - 4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \\ \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 4. Giải phương trình: $\log_x \cos x = 0$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \log_x \cos x = \log_x 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 2k\pi$, $k \leq 0$ thì biểu thức $\log_x \cos x$ vô nghĩa nên $x = 2k\pi$, $k \leq 0$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \log_x \cos x = \log_x 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ x > 0; x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x > 0; x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ với } k > 0$$

Bài 5. Giải phương trình: $\log_{\sin 3x} (\cos x - \cos 2x) = 1$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \log_{\sin 3x} (\cos x - \cos 2x) = \log_{\sin 3x} \sin 3x \Leftrightarrow \cos x - \cos 2x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \cos 2x = \sin 3x \Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{3x}{2} = 0 \\ \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{3x}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{3x}{2} = 0 \\ \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = k\pi \\ \pm \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + 2k\pi = \frac{3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = \frac{2k\pi}{3}$ thì biểu thức $\log_{\sin 3x} (\cos x - \cos 2x)$ vô nghĩa do $\sin 3x = 0$ nên

$x = \frac{2k\pi}{3}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \log_{\sin 3x} (\cos x - \cos 2x) = \log_{\sin 3x} \sin 3x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \cos 2x = \sin 3x \\ \sin 3x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \cos 2x = \sin 3x \\ \sin 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} \\ \sin 3x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{3x}{2} = 0 \text{ (loại)} \\ \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{3x}{2} \\ \sin 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{3x}{2} \\ \sin 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pm \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + 2k\pi = \frac{3x}{2} \\ \sin 3x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \sin 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Bài 6. Giải phương trình: $\arcsin(3x^2 - x + 1) = \arcsin(9x - 2)$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow 3x^2 - x + 1 = 9x - 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = 3$ thì biểu thức $\arcsin(9x - 2) = \arcsin 25$ vô nghĩa do tính chất của hàm số $y = \arcsin x$.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x + 1 = 9x - 2 \\ |9x - 2| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Bài 7. Giải phương trình: $\arccos(2x - 1) = 3 \arccos x$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \cos[\arccos(2x - 1)] = \cos(3 \arccos x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=4\cos^3(\arccos x)-3\cos(\arccos x) \Leftrightarrow 2x-1=4x^3-3x \Leftrightarrow 4x^3-5x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(4x^2+4x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 4x^2+4x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ thì biểu thức $\arccos x$ vô nghĩa do tính chất của hàm số

$y=\arccos x$ nên $x=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \cos[\arccos(2x-1)] = \cos(3\arccos x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=4\cos^3(\arccos x)-3\cos(\arccos x) \\ -1\leq 2x-1\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=4x^3-3x \\ -1\leq 2x-1\leq 1 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-5x+1=0 \\ 0\leq x\leq 1 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(4x^2+4x-1)=0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ 4x^2+4x-1=0 \end{cases} \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Bài 8. Giải phương trình: $\ln\sqrt{1+x}+3\ln\sqrt{1-x}=\ln\sqrt{1-x^2}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \ln[\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3] = \ln\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3 = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}(1-x) = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}=0 \\ 1-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=0 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = \pm 1$ thì biểu thức $\ln \sqrt{1-x^2}$ vô nghĩa nên $x = \pm 1$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x > 0; 1-x > 0; 1-x^2 > 0 \\ \ln[\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3] = \ln \sqrt{1-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3 = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \sqrt{1-x^2}(1-x) = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x\sqrt{1-x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 9. Giải phương trình: $\log_3(\log_2 x - 9) = 2 + \log_3(1 - 4\log_x 4)$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \log_3(\log_2 x - 9) = \log_3 9(1 - 8\log_x 2) \Leftrightarrow \log_2 x - 9 = 9(1 - 8\log_x 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x - 9 = 9\left(1 - \frac{8}{\log_2 x}\right) \Leftrightarrow \log_2^2 x - 18\log_2 x + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 6)(\log_2 x - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 6 \\ \log_2 x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^6 \\ x = 2^{12} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 2^6$ thì biểu thức $\log_3(\log_2 x - 9)$ vô nghĩa nên $x = 2^6$ là nghiệm ngoại lai.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \log_3(\log_2 x - 9) = \log_3 9(1 - 8\log_x 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - 9 > 0; 1 - 8\log_x 2 > 0 \\ \log_2 x - 9 = 9(1 - 8\log_x 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > 9 \\ \log_2 x - 9 = 9\left(1 - \frac{8}{\log_2 x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > 9 \\ \log_2^2 x - 18\log_2 x + 72 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > 9 \\ (\log_2 x - 6)(\log_2 x - 12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 x = 12 \Leftrightarrow x = 2^{12}$$

• **BÌNH LUẬN:** $\varphi[f(x)] = \varphi[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \in D[\varphi(f)] \end{cases}$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt{7+3x} = 4-x$

Bài 2. Giải phương trình: $\lg(5-x) + 2\lg\sqrt{3-x} = 1$

Bài 3. Giải phương trình: $\lg(\sqrt{x+3}-1) = \frac{2}{\log_{\sqrt{x}} 10}$

Bài 4. Giải phương trình: $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 = 4$

Bài 5. Giải phương trình: $\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}(\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{-x^2-6x}{10}} \sin 2x$

Bài 6. Giải phương trình: $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\frac{\sin x}{5}}$

Bài 7. Giải phương trình:

$$\log_{\lg x} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin 2x + \cos 2x + \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \sin x \right) = 2$$

Bài 8. Giải phương trình: $\sqrt{2 \sin x \sin 2x} = \sqrt{5 \cos x + 4 \sin 2x}$

Bài 9. Giải phương trình: $\arcsin x = \operatorname{arccotg} x$

Bài 10. Giải phương trình: $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = -\frac{3\pi}{4}$

Bài 11. Giải phương trình: $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$

Bài 12. Giải phương trình: $\arcsin\left(\frac{\pi}{6} + \cotg x\right) + \arccos\left(\frac{6}{\pi} + \tg x\right) = \frac{\pi}{2}$

Bài 13. Giải phương trình: $\lg \sqrt{1+x} + 3\lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1-x^2}$

Bài 14. Giải phương trình: $\log_3(\log_2 x - 9) = 2 + \log_3(1 - 4\log_x 4)$

§2. SAI LẦM THƯỜNG GẶP TRONG BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. Dạng 1: $\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{a}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \neq 0 \\ bf(x) \geq ag(x) \end{cases}; \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \neq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} ?$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải bất phương trình: $\frac{x+1}{x^2+x-12} \geq -\frac{1}{2}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-12 \neq 0 \\ 2(x+1) \geq -(x^2+x-12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-3) \neq 0 \\ x^2+3x-10 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3; x \neq -4 \\ x \geq 2 \vee x \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2; x \neq 3 \\ x \leq -5 \end{cases} \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x \in (-4, 3)$ thì $x^2+x-12 < 0$ và khi nhân 2 vế với biểu thức này thì dấu bất phương trình nhận được đổi ngược lại.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+x-12} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1) + (x^2+x-12)}{x^2+x-12} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+3x-10}{x^2+x-12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+5)(x-2)}{(x+4)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -4 < x \leq 2 \\ x \leq -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $\frac{1}{x+3} \geq \frac{1}{4x-6}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(4x-6) \neq 0 \\ x+3 \leq 4x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3; x \neq \frac{3}{2} \\ 3x \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3; x \neq \frac{3}{2} \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x \in (-3, \frac{3}{2})$ thì $x+3 > 0 > 4x-6$ và bất phương trình nghiệm đúng.

Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} - \frac{1}{4x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-6-(x+3)}{(x+3)(4x-6)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-3)}{(x+3)(4x-6)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -3 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bài 3. Giải bất phương trình: $\frac{1}{2^{x+1}+1} \geq \frac{1}{4^x+2^{x+1}-3} \quad (*)$

• **Sai lầm thường gặp:**

Đặt $t = 2^x, t > 0$, khi đó: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2t+1} \geq \frac{1}{t^2+2t-3} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2t+1)(t^2+2t-3) \neq 0 \\ t > 0 \\ 2t+1 \leq t^2+2t-3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2t+1)(t-1)(t+3) \neq 0 \\ t > 0; t^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 1; t > 0 \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 2 \Leftrightarrow 2^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x < 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 < 0 \Leftrightarrow 4^x + 2^{x+1} - 3 = (2^x - 1)(2^x + 3) < 0$ thì

$$\frac{1}{2^{x+1}+1} > 0 > \frac{1}{4^x+2^{x+1}-3}, \text{ nên } x < 0 \text{ nghiệm đúng phương trình } (*).$$

Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• **Lời giải đúng:**

Đặt $t = 2^x, t > 0$, khi đó: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2t+1} \geq \frac{1}{t^2+2t-3} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2+2t-3-(2t+1)}{(2t+1)(t^2+2t-3)} \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2-4}{(2t+1)(t+3)(t-1)} \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t-2}{t-1} \leq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ 0 < t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 2 \\ 2^x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Bài 4. Giải bất phương trình: $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2-3x+1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} \quad (*)$

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \log_{\frac{1}{3}} (x+1) \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < \log_{\frac{1}{3}} (x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \neq 1; 0 < x+1 \neq 1 \\ \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > x+1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x^2 - 3x + 1 \neq 1; -1 < x \neq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 > (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x-3) \neq 0; x > 1 \vee x < \frac{1}{2}; -1 < x \neq 0 \\ x^2 - 5x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3}{2}; x \neq 0; x > 1 \vee x < \frac{1}{2}; x > -1 \\ x > 5 \vee x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

$$\text{Với } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \vee x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < 1 \\ x+1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} (x+1) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x+1)}, \text{ nên } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \vee x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ nghiệm đúng.}$$

Cách giải trên đã làm mất nghiệm của bất phương trình.

• Lời giải đúng:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 0 > \log_{\frac{1}{3}} (x+1) \\ 0 < \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < \log_{\frac{1}{3}} (x+1) \\ \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < \log_{\frac{1}{3}} (x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < 1 < x+1 \\ 1 > \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > x+1 \\ \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > x+1 > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 2x^2 - 3x + 1 < 1; x > 0 \\ \begin{cases} 1 > 2x^2 - 3x + 1 > 0 \\ x < -1 \\ x > -1; 2x^2 - 3x + 1 > (x+1)^2 \end{cases} \\ 2x^2 - 3x + 1 > (x+1)^2 > 1; x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \vee x < \frac{1}{2}; 0 < x < \frac{3}{2} \\ \begin{cases} 0 < x < \frac{3}{2}; x > 1 \vee x < \frac{1}{2} \\ x > -1; \end{cases} \\ x^2 - 5x > 0; x^2 + 2x > 0; x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2} \vee 1 < x < \frac{3}{2} \vee x > 5$$

Bài 5. Giải bất phương trình: $\log_x 100 - \frac{1}{2} \log_a 100 > 0$ với $0 < a \neq 1$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{100} x} > \frac{1}{2 \log_{100} a} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{100} x \cdot \log_{100} a \neq 0 \\ \log_{100} x < 2 \log_{100} a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \log_{100} x < \log_{100} a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 0 < x < a^2 \end{cases}$$

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{100} x} - \frac{1}{2 \log_{100} a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2 \log_{100} a - \log_{100} x}{\log_{100} x \log_{100} a} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{100} a^2 - \log_{100} x}{\log_{100} x \cdot \log_{100} a} > 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - x}{\log_{100} x \cdot \log_{100} a} > 0$$

• Nếu $0 < a < 1$ thì $(*) \Leftrightarrow \frac{a^2 - x}{x - 1} < 0 \Leftrightarrow a^2 < x < 1$

• Nếu $a > 1$ thì $(*) \Leftrightarrow \frac{a^2 - x}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow x > a^2 \vee x < 1$

• **BÌNH LUẬN:** $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow b g(x) [b f(x) - a g(x)] > 0$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 > g(x) \\ 0 < f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) g(x) [g(x) - f(x)] > 0 \\ f(x) < g(x) < 0 \end{cases}$$

Ở bậc tiểu học, chúng ta có quy tắc so sánh 2 phân số: nếu 2 phân số có cùng tử số, phân số nào có mẫu số lớn hơn thì phân số ấy bé hơn. Thật ra quy tắc này phù hợp với tập hợp số tự nhiên (số dương) được học ở bậc tiểu học và quy tắc không còn đúng khi chúng ta biết thêm các số âm (số thực).

$$\text{II. Dạng 2a. } \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \quad ?$$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} - x + 2 > 0$ (1)

• *Sai lầm thường gặp:* (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 1} > x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 > (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

• *Nguyên nhân sai lầm:* Phép biến đổi trên đã xét thiếu trường hợp $x - 2 < 0$

• *Lời giải đúng:* (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 1} > x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 > (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \\ x > 3 \end{cases}$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 7 - x^2 - 2x$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$\text{Đặt } t = 5x^2 + 10x + 1, t \geq 0, \text{ khi đó: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t} \geq 7 - \frac{t-1}{5} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t} \geq \frac{36-t}{5} \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \left(\frac{36-t}{5}\right)^2 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 97t + 1296 \leq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 \leq t \leq 81 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 16 \leq 5x^2 + 10x + 1 \leq 81$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \vee x \leq -3 \\ -1 - \sqrt{17} \leq x \leq -1 + \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{17} \leq -3 \\ 1 \leq x \leq -1 + \sqrt{17} \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Với $x < -1 - \sqrt{17}$ ∨ $x > -1 + \sqrt{17}$ thì $7 - x^2 - 2x < 0$

$\Rightarrow \sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 0 > 7 - x^2 - 2x$ nên $x < -1 - \sqrt{17}$ ∨ $x > -1 + \sqrt{17}$ nghiệm đúng. Cách giải trên đã làm mất nghiệm của bất phương trình.

• Lời giải đúng:

Đặt $t = 5x^2 + 10x + 1, t \geq 0$, khi đó: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{t} \geq 7 - \frac{t-1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{t} \geq \frac{36-t}{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \left(\frac{36-t}{5}\right)^2; \frac{36-t}{5} \geq 0 \\ t \geq 0; \frac{36-t}{5} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 97t + 1296 \leq 0 \\ t \leq 36 \\ t > 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 \leq t \leq 81 \\ t \leq 36 \\ t > 36 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 16$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 \geq 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -3$$

• Cách 2: Đặt $t = \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 0$, khi đó: (*) $\Leftrightarrow t \geq 7 - \frac{t^2-1}{5}; t \geq 0$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{36-t^2}{5}; t \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 5t - 36 \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \vee t \leq -9 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 \geq 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -3$$

Bài 3. Giải bất phương trình: $\sqrt{2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sin x} \geq 2\sin x - \sqrt{2}$ (*)

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sin x \geq (2\sin x - \sqrt{2})^2 \\ 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sin x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sin x \geq 4\sin^2 x - 4\sqrt{2}\sin x + 2 \\ \sin x \leq \frac{2 + \sqrt{6}}{6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sin x - \sqrt{6} \leq 0 \\ \sin x \leq \frac{2 + \sqrt{6}}{6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \leq \frac{2 + \sqrt{6}}{6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{3} \right]$$

• Nguyên nhân sai lầm:

$$\text{Với } x \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right) \text{ thì } \begin{cases} 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sin x > 0 \\ 2\sin x - \sqrt{2} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sin x} > 0 > 2\sin x - \sqrt{2}, \text{ nên } x \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right) \text{ nghiệm đúng.}$$

• Lời giải đúng:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sin x \geq 0 \\ 2\sin x - \sqrt{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sin x \geq (2\sin x - \sqrt{2})^2 \\ 2\sin x - \sqrt{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq \frac{2 + \sqrt{6}}{6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}; \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sin x - \sqrt{6} \leq 0 \\ \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \right]$$

• BÌNH LUẬN: $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$

Dạng 2b. $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases} \quad ?$

Bài 1. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 16} \leq 2x - 7 \quad (*)$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 - 16 \leq (2x - 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -4 \\ x^2 - 16 \leq 4x^2 - 28x + 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -4 \end{cases}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x \leq -4 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 16} \geq 0 > 2x - 7$, nên $x \leq -4$ là nghiệm ngoại lai.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 \geq 0; 2x - 7 \geq 0 \\ x^2 - 16 \leq (2x - 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -4 \\ x \geq \frac{7}{2} \\ x^2 - 16 \leq 4x^2 - 28x + 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 3x^2 - 28x + 65 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq 5 \\ x \leq \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $\sqrt{3 + 4\sqrt{6} - (16\sqrt{3} - 8\sqrt{2})\cos x} \leq 4\cos x - \sqrt{3} \quad (*)$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4\sqrt{6} - (16\sqrt{3} - 8\sqrt{2})\cos x \geq 0 \\ 3 + 4\sqrt{6} - (16\sqrt{3} - 8\sqrt{2})\cos x \leq (4\cos x - \sqrt{3})^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq \frac{3 + 4\sqrt{6}}{16\sqrt{3} - 8\sqrt{2}} \\ 3 + 4\sqrt{6} - (16\sqrt{3} - 8\sqrt{2})\cos x \leq 16\cos^2 x - 8\sqrt{3}\cos x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq \frac{3+4\sqrt{6}}{16\sqrt{3}-8\sqrt{2}} \\ 4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x - \sqrt{6} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq \frac{3+4\sqrt{6}}{16\sqrt{3}-8\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}\right]$$

• Nguyên nhân sai lầm:

$$\text{Với } x \in \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{5\pi}{6}\right) \cap \left(\frac{7\pi}{6}, 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3+4\sqrt{6} - (16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x > 0 \\ 4\cos x - \sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3+4\sqrt{6} - (16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x} > 0 > 4\cos x - \sqrt{3}$$

$$\text{nên } x \in \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{5\pi}{6}\right) \cap \left(\frac{7\pi}{6}, 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ là nghiệm ngoại lai.}$$

• Lời giải đúng:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4\sqrt{6} - (16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x \geq 0; 4\cos x - \sqrt{3} \geq 0 \\ 3+4\sqrt{6} - (16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x \leq (4\cos x - \sqrt{3})^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \cos x \leq \frac{3+4\sqrt{6}}{16\sqrt{3}-8\sqrt{2}} \\ 3+4\sqrt{6} - (16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x \leq 16\cos^2 x - 8\sqrt{3}\cos x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \cos x \leq \frac{3+4\sqrt{6}}{16\sqrt{3}-8\sqrt{2}} \\ 4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x - \sqrt{6} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \cos x \leq \frac{3+4\sqrt{6}}{16\sqrt{3}-8\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \arccos \frac{\sqrt{3}}{4}\right] \cup \left[2\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$$

• BÌNH LUẬN: $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$

$$\text{Dạng 3: } a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} ?$$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải bất phương trình: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} \geq 4^{1-x} \quad (*)$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} \geq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{1-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x \geq -2(1-x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \vee x \leq 1$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Do $\frac{1}{2} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, suy ra phép biến đổi của cách giải trên đã sai lầm.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} \geq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{1-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x \leq -2(1-x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $x^{x^2-1} \geq x^{2x+2} \quad (*)$

• *Sai lầm thường gặp 1:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \geq 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Do chưa chắc $x \geq 1$ nên phép biến đổi của cách giải trên đã ngộ nhận $x \geq 1$.

• **Sai lầm thường gặp 2:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - 1 \leq 2x + 2 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 1 \geq 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x + 3 \leq 0 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ x \geq 1 \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Do $x = 1$ thỏa mãn (*) nên là nghiệm của bất phương trình.

Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 1 \leq 2x + 2 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 1 \geq 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3 \leq 0 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ x \geq 1 \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

• **BÌNH LUẬN:** $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) & \text{nếu } a \geq 1 \\ f(x) \leq g(x) & \text{nếu } a \leq 1 \end{cases}$

Khi giải bất phương trình mũ ta cần chú ý các tính chất của hàm số mũ:

+ Nếu cơ số $a > 1$ thì hàm số mũ $y = a^x$ đồng biến

+ Nếu cơ số $0 < a < 1$ thì hàm số mũ $y = a^x$ nghịch biến

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 3. Giải bất phương trình: $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

Bài 4. Giải bất phương trình: $8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Bài 5. Giải bất phương trình: $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} \geq 34 \cdot 15^{2x-x^2}$

IV. Dạng 4. $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) \geq g(x) > 0 \end{cases} ?$

Bài 1. Giải BPT: $\log_x [\log_3 (9^x - 72)] \leq 1$ (*) (ĐT ĐH 2002 khối B)

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 (9^x - 72) \leq x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 72 \leq 3^x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq 3^x \leq 9 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \leq 9 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

• Lời giải đúng:

Đề (*) có nghiệm thì $\log_3 (9^x - 72)$ phải có nghĩa $\Leftrightarrow 9^x - 72 > 0 \Rightarrow x > 1$,

$$\text{do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 (9^x - 72) \leq x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 72 \leq 3^x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq 3^x \leq 9 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \leq 9 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{3}} (4^{x+1} - 2^{x+2} + 2) \geq \log_3 \frac{1}{2^x + 3}$ (*)

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} (4^{x+1} - 2^{x+2} + 2) \geq \log_{\frac{1}{3}} (2^x + 3) \Leftrightarrow 4^{x+1} - 2^{x+2} + 2 \geq 2^x + 3$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 2^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

• Lời giải đúng:

$$(*) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} (4^{x+1} - 2^{x+2} + 2) \geq \log_{\frac{1}{3}} (2^x + 3) \Leftrightarrow 4^{x+1} - 2^{x+2} + 2 \leq 2^x + 3$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq 2^x \leq 1 \Leftrightarrow 2^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Bài 3. Giải bất phương trình: $\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1$ (*) với $0 < a \neq 1$

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_a x (\log_a x - 1)}{1 + \log_a x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \log_a x < 0 \\ \log_a x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} < x < 1 \\ x > a \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Không phân loại cơ sở a theo 2 khả năng: $0 < a < 1$ và $a > 1$

• Lời giải đúng:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_a x (\log_a x - 1)}{1 + \log_a x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \log_a x < 0 \\ \log_a x > 1 \end{cases}$$

• Với $0 < a < 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \log_a x < 0 \\ \log_a x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} > x > 1 \\ 0 < x < a \end{cases}$

• Với $a > 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \log_a x < 0 \\ \log_a x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} < x < 1 \\ x > a \end{cases}$

• BÌNH LUẬN: + Nếu $a > 1$ thì $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

+ Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 4. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_2 x > 1$

Bài 5. Giải bất phương trình: $\log_{|x|} (\sqrt{9 - x^2} - x - 1) \geq 1$

Bài 6. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{3x}{x^2+1}} \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \right) \geq 0$

Bài 7. Giải bất phương trình: $4\log_2 x + \log_2 \frac{x^2}{8(x-1)} \leq 4 - \log_2 (x-1) - \log_2^2 x$

Bài 8. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{x^2-7x}{10}} (2x^2 - x - 2) \leq \log_{\frac{x^2-7x}{10}} (8x - 3x^2)$

V. Dạng 5: $a^{\log_a f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) ?$

Bài 1. Giải bất phương trình: $8^{\frac{1}{3} \log_2(2x+1)} \leq \sqrt{2x^2 + 7x} \quad (*)$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow (2^3)^{\frac{1}{3} \log_2(2x+1)} \leq \sqrt{2x^2 + 7x} \Leftrightarrow 2^{\log_2(2x+1)} \leq \sqrt{2x^2 + 7x}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 \leq \sqrt{2x^2 + 7x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \leq 0 \\ 2x^2 + 7x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ (2x+1)^2 \leq 2x^2 + 7x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq 0 \\ x \leq -\frac{7}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{2} \vee \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{2} \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x \leq -\frac{7}{2} \Rightarrow 2x+1 < 0 \Rightarrow \log_2(2x+1)$ vô nghĩa, nên $x \leq -\frac{7}{2}$ là nghiệm ngoại lai.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow (2^3)^{\frac{1}{3} \log_2(2x+1)} \leq \sqrt{2x^2 + 7x} \Leftrightarrow 2^{\log_2(2x+1)} \leq \sqrt{2x^2 + 7x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 2x+1 \leq \sqrt{2x^2 + 7x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ (2x+1)^2 \leq 2x^2 + 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2} \log_3(\lg x - 1)} \geq \frac{1}{1 - 3 \lg^2 x} \quad (*)$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow (3^{-2})^{\frac{1}{2} \log_3(\lg x - 1)} \geq \frac{1}{1 - 3 \lg^2 x} \Leftrightarrow [3^{\log_3(\lg x - 1)}]^{-1} \geq \frac{1}{1 - 3 \lg^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} \geq \frac{1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} - \frac{1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2}{(\operatorname{tg} x - 1)(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\operatorname{tg} x + 1)(-3 \operatorname{tg} x + 2)}{(\operatorname{tg} x - 1)(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg} x \leq \frac{2}{3} \\ -1 \leq \operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k\pi \\ \frac{\pi}{6} + k\pi < x \leq \arctg \frac{2}{3} + k\pi \\ -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Cách giải trên đã không đặt điều kiện $\operatorname{tg} x - 1 > 0$, nên xuất hiện nghiệm ngoại lai.

• Lời giải đúng:

$$(*) \Leftrightarrow (3^{-2})^{\frac{1}{2} \log_3(\operatorname{tg} x - 1)} \geq \frac{1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \Leftrightarrow [3^{\log_3(\operatorname{tg} x - 1)}]^{-1} \geq \frac{1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} \geq \frac{1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} - \frac{1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \geq 0 \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2}{(\operatorname{tg} x - 1)(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x)} \geq 0 \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(\operatorname{tg} x + 1)(-3 \operatorname{tg} x + 2)}{(\operatorname{tg} x - 1)(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x)} \geq 0 \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x > 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k\pi$$

• BÌNH LUẬN: $+ a^{\log_a f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (a > 0)$

$$+ a^{\log_a f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 3. Giải bất phương trình: $x^{\log_x(x+3)^2} \leq 16$

Bài 4. Giải bất phương trình: $(x^2)^{\log_x(x-2)} > 9$

$$\text{VI. Dạng 6: } \log_a \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \geq g(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \leq g(x) \end{cases} ?$$

Bài 1. Giải bất phương trình: $\log_2 \frac{4x^2 - 4x - 1}{2x - 3} \geq 0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \log_2 (4x^2 - 4x - 1) - \log_2 (2x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 (4x^2 - 4x - 1) \geq \log_2 (2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 1 \geq 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \vee x \leq \frac{1}{2} \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Phép biến đổi từ $\log_2 \frac{4x^2 - 4x - 1}{2x - 3}$ thành $\log_2 (4x^2 - 4x - 1) - \log_2 (2x - 3)$ là không tương đương.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x - 1}{2x - 3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x - 1}{2x - 3} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $\log_4 \frac{\operatorname{tg}^3 x \cos x}{(2 \cos x - \sin x)} \leq 0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \log_4 \frac{\operatorname{tg}^3 x}{2 - \operatorname{tg} x} \leq 0 \Leftrightarrow \log_4 \operatorname{tg}^3 x - \log_4 (2 - \operatorname{tg} x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_4 \operatorname{tg}^3 x \leq \log_4 (2 - \operatorname{tg} x) \Leftrightarrow 0 < \operatorname{tg}^3 x \leq 2 - \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 2 \leq 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2) \leq 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \operatorname{tg} x \leq 1 \Leftrightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Phép biến đổi từ $\log_4 \frac{\operatorname{tg}^3 x}{2 - \operatorname{tg} x} \leq 0$ thành $\log_4 \operatorname{tg}^3 x - \log_4 (2 - \operatorname{tg} x) \leq 0$ là

không tương đương.

• Lời giải đúng:

$$(*) \Leftrightarrow \log_4 \frac{\operatorname{tg}^3 x}{2 - \operatorname{tg} x} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{\operatorname{tg}^3 x}{2 - \operatorname{tg} x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{2 - \operatorname{tg} x} - 1 \leq 0 \\ \operatorname{tg}^3 x (2 - \operatorname{tg} x) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 2}{2 - \operatorname{tg} x} \leq 0 \\ \operatorname{tg} x (2 - \operatorname{tg} x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2)}{2 - \operatorname{tg} x} \leq 0 \\ 0 < \operatorname{tg} x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2 - \operatorname{tg} x} \leq 0 \\ 0 < \operatorname{tg} x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x > 2 \\ \operatorname{tg} x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \operatorname{tg} x \leq 1 \Leftrightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{BÌNH LUẬN: } \log_a \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ \frac{f(x)}{g(x)} \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < a < 1 \\ \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 \end{cases}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 3. Giải bất phương trình: $\log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 0$

Bài 4. Giải bất phương trình: $\log_3 \frac{2^x - 3}{4^x - 5 \cdot 2^x - 19} \geq 0$

VII. Dạng 7: $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) \geq g(x) + h(x)$?

$$f(x) + h(x) \geq g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \quad ?$$

Bài 1. Giải bất phương trình: $x^2 - x - 4 + \sqrt{4 - x^2} \leq \frac{x^2}{2 - \sqrt{4 - x^2}}$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - x - 4 + \sqrt{4 - x^2} \leq 2 + \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Phép biến đổi $x^2 - x - 4 + \sqrt{4 - x^2} \leq 2 + \sqrt{4 - x^2}$ thành $x^2 - x - 6 \leq 0$ là không tương đương.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - x - 4 + \sqrt{4 - x^2} \leq 2 + \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $\lg \frac{x+1}{(x-2)(2x+1)} \geq \lg \frac{(x+1)(x+2)}{x-2}$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \lg \frac{x+1}{x-2} - \lg(2x+1) \geq \lg \frac{x+1}{x-2} + \lg(x+2) \Leftrightarrow -\lg(2x+1) \geq \lg(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \lg \frac{1}{2x+1} \geq \lg(x+2) \Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} \geq x+2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x+1} - x + 2 \geq 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x^2 - 5x - 1}{2x+1} \geq 0 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x^2 - 5x - 1}{2x+1} \geq 0 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} \geq x > -\frac{1}{2} \\ x < \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} \\ x > -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} \geq x > -\frac{1}{2}$$

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-2)(2x+1)} \geq \frac{(x+1)(x+2)}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{(x-2)(2x+1)} - \frac{(x+1)(x+2)}{x-2} \geq 0 \\ \frac{(x+1)(x+2)}{x-2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)[1-(x+2)(2x+1)]}{(x-2)(2x+1)} \geq 0 \\ x > 2 \vee -1 < x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(2x^2+5x+1)}{(x-2)(2x+1)} \leq 0 \\ x > 2 \vee -1 < x < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(2x^2+5x+1)}{(x-2)(2x+1)} \leq 0 \\ -1 < x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+5x+1 \geq 0 \\ -2 < x < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-5+\sqrt{17}}{4} \vee x \leq \frac{-5-\sqrt{17}}{4} \\ -2 < x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

BÌNH LUẬN:

Khi thêm vào 2 vế của một phương trình hoặc bất phương trình với cùng một hàm số thì ta nhận được một phương trình hoặc bất phương trình không tương đương với phương trình hoặc bất phương trình xuất phát vì phép biến đổi này có thể làm thay đổi tập xác định của phương trình, bất phương trình xuất phát.

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 3. Giải bất phương trình: $3x^2 - 2x + 1 - \sqrt{25 - x^2} \geq \frac{x^2}{5 + \sqrt{25 - x^2}}$ (*)

Bài 4. Giải bất phương trình: $\ln \frac{3x-2}{(x+4)(2x-1)} \geq \ln \frac{(3x-2)(x-5)}{2x-1}$ (*)

Bài 5. Giải bất phương trình: $\log_2 \sqrt{\frac{(2x+3)(4x-5)}{x-1}} \leq \log_4 \frac{4x-5}{(3x+2)(x-1)}$

Bài 6. Giải bất phương trình: $\log_3 \sqrt[3]{\frac{5x-6}{(4x-3)(3x+2)}} \geq \log_{27} \frac{(7x-3)(5x-6)}{4x-3}$

VIII. Dạng 8. $f^2(x)g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$; $f^2(x)g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải bất phương trình: $x^2(2x^2 - 3x + 1) \geq 0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq \frac{1}{2}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = 0$ thì $x^2(2x^2 - 3x + 1) = 0$ nên (*) thoả mãn. Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq \frac{1}{2} \vee x = 0.$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $(\operatorname{tg} x - 1)(\sin x - \cos x)(\sin 2x - \cos 3x - \cos x) \geq 0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \cdot (\sin x - \cos x) [2 \sin x \cos x - (\cos 3x + \cos x)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x - \cos x)^2 (2 \sin x \cos x - 2 \cos x \cos 2x)}{\cos x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cos x (\sin x - \cos 2x)}{\cos x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos 2x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \vee \sin x \leq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ thì $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow (\operatorname{tg} x - 1)(\sin x - \cos x)(\sin 2x - \cos 3x - \cos x) = 0$

nên (*) thoả mãn. Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \cdot (\sin x - \cos x)[2 \sin x \cos x - (\cos 3x + \cos x)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x - \cos x)^2 (2 \sin x \cos x - 2 \cos x \cos 2x)}{\cos x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x - \cos x)^2 [2 \cos x (\sin x - \cos 2x)]}{\cos x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x - \cos 2x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2 \sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \sin x \geq \frac{1}{2} \vee \sin x \leq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Bài 3. Giải bất phương trình: $\frac{[\log_{\sqrt{2}}(x-3)]^2}{x^2 - 4x - 5} \leq 0$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ \frac{1}{x^2 - 4x - 5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -1 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 5$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Trong phép biến đổi trên chúng ta đã xét thiếu trường hợp khi tử thức bằng 0. Chú ý rằng ứng với tử thức bằng 0 thì mẫu thức khác 0 có dấu tùy ý

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} [\log_{\sqrt{2}}(x-3)]^2 = 0 \\ \begin{cases} x-3 > 0 \\ \frac{1}{x^2-4x-5} \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-3) = 0 \\ \begin{cases} x > 3 \\ x^2-4x-5 < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ \begin{cases} x > 3 \\ -1 < x < 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 3 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 5$$

Bài 4. Giải bất phương trình: $\sin x \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 3) \leq 0$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 4 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos x} \leq -2 \\ 0 \leq \frac{1}{\cos x} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \cos x < 0 \\ \cos x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

BÌNH LUẬN: $f^2(x)g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}; f^2(x)g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 5. Giải bất phương trình: $(2x-1)^2(4x+3)^4(3x^2-5x+2) \leq 0$

Bài 6. Giải bất phương trình: $\cos x \cotg x (3 \cotg^2 x - 1) \leq 0$

Bài 7. Giải bất phương trình: $(\operatorname{tg}^2 x - 3)(\sin x + \cos x - 1)(\sin 2x - \cos 3x - \cos x) \geq 0$

Bài 8. Giải bất phương trình: $\frac{[\log_3(2x-1)]^2}{4x^2-7x+3} \leq 0$

IX. Dạng 9. $[1 \pm \sin^n u(x)]g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$?

$$[1 \pm \sin^n u(x)]g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0 \quad ?$$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải bất phương trình: $(1 - \sin x)(\cos 2x - \sin x) \geq 0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \cos 2x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi.$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ thì $(1 - \sin x)(\cos 2x - \sin x) = 0$ nên (*) thoả mãn.

Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• *Lời giải đúng:*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin x = 0 \\ \cos 2x - \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ 1 - 2\sin^2 x - \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2\sin^2 x + \sin x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $(1 + \cos^5 3x)[\lg(5 - x) + 2\lg\sqrt{3 - x} - 1] \geq 0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(*) \Leftrightarrow \lg(5 - x) + 2\lg\sqrt{3 - x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \lg(5 - x) + \lg(3 - x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg[(5 - x)(3 - x)] \geq 1 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5 - x)(3 - x) \geq 10 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 5 \geq 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 + \sqrt{11} \vee x \leq 4 - \sqrt{11} \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 4 - \sqrt{11}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \leq 0$ thì $1 + \cos 3x = 0$ nên $(1 + \cos^5 3x)[\lg(5-x) + 2\lg\sqrt{3-x} - 1] = 0$

suy ra $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \leq 0$ là nghiệm của (*). Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• Lời giải đúng:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos^5 3x = 0; 3 - x > 0 \\ \lg(5-x) + 2\lg\sqrt{3-x} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1; x < 3 \\ \lg(5-x) + \lg(3-x) \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi + 2k\pi; x < 3 \\ \lg[(5-x)(3-x)] \geq 1 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x < 3 \\ (5-x)(3-x) \geq 10 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \leq 0 \\ x^2 - 8x + 5 \geq 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \leq 0 \\ x \geq 4 + \sqrt{11} \vee x \leq 4 - \sqrt{11} \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \leq 0 \\ x \leq 4 - \sqrt{11} \end{cases}$$

BÌNH LUẬN: $[1 \pm \sin^n u(x)]g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \pm \sin^n x = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \pm \sin^n x = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$$[1 \pm \sin^n u(x)]g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \pm \sin^n x = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 3. Giải bất phương trình: $(2 + 2\cos^3 x)(2^{2x+3} + 7 \cdot 2^{x+1} - 4) \geq 0$

Bài 4. Giải bất phương trình: $(1 + \sin^5 x) \left[2 - \log_5 \frac{100}{x+2} + \log_5 (3-x) \right] \leq 0$

Bài 5. Giải bất phương trình:

$$(1 + \cos^7 x) \left[1 + \sqrt{\log_9 (3x^2 - 4x + 2)} - \log_3 (3x^2 - 4x + 2) \right] \geq 0$$

$$\text{X. Dạng 10: } \sqrt{f(x)}g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}; \sqrt{f(x)}g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} ?$$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. GBPT: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$ (*) (Đề thi ĐH năm 2002 khối D)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \vee x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \vee x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 2$ thì (*) nghiệm đúng, nên $x = 2$ là nghiệm của (*).

Cách giải trên đã làm mất nghiệm của phương trình.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \\ (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 - 3x = 0; 2x^2 - 3x - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \\ x = 3 \\ x > 3 \vee x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq 3 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $(2x - 5)\sqrt{2x^2 - 5x + 2} \geq 0$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \\ 2x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \vee x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Với $x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$ thì (*) nghiệm đúng, nên $x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình (*). Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• Lời giải đúng:

$$\begin{aligned}
 (*) \Leftrightarrow & \begin{cases} (2x-5)\sqrt{2x^2-5x+2} = 0 \\ (2x-5)\sqrt{2x^2-5x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0 \\ 2x-5=0 \\ 2x^2-5x+2 \geq 0 \\ 2x^2-5x+2 > 0 \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \vee x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{5}{2} \\ x > 2 \vee x < \frac{1}{2} \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x=2 \vee x=\frac{1}{2} \vee x=\frac{5}{2} \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \vee x=\frac{1}{2} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bài 3. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{x-2}}{3^{x-1}-9} \geq 0$ (*)

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3^{x-1}-9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3^{x-1} > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x-1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Với $x = 2$ thì (*) nghiệm đúng, nên $x = 2$ là nghiệm của phương trình (*).

Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• Lời giải đúng:

$$\begin{aligned}
 (*) \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{\sqrt{x-2}}{3^{x-1}-9} = 0 \\ \frac{\sqrt{x-2}}{3^{x-1}-9} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ 3^{x-1}-9 \neq 0 \\ x-2 > 0 \\ 3^{x-1}-9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3^{x-1} \neq 9 \\ x > 2 \\ 3^{x-1} > 9 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x>2 \\ x-1>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x>2 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x>3 \end{cases}$$

Bài 4. Giải bất phương trình: $\sqrt{3^{2x+1} - 4.3^x + 1}(\log_3^2 x - 1) \geq 0$ (*)

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x+1} - 4.3^x + 1 \geq 0 \\ \log_3^2 x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.(3^x)^2 - 4.3^x + 1 \geq 0 \\ (\log_3 x - 1)(\log_3 x + 1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3^x - 1)(3.3^x - 1) \geq 0 \\ (\log_3 x - 1)(\log_3 x + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 1 \vee 3^x \leq \frac{1}{3} \\ \log_3 x \geq 1 \vee \log_3 x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \vee x \leq -1 \\ x \geq 3 \vee 0 < x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 0 < x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

$$\text{Phép biến đổi } \sqrt{3^{2x+1} - 4.3^x + 1}(\log_3^2 x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x+1} - 4.3^x + 1 \geq 0 \\ \log_3^2 x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

là không tương đương.

• Lời giải đúng:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3^{2x+1} - 4.3^x + 1}(\log_3^2 x - 1) = 0 \\ \sqrt{3^{2x+1} - 4.3^x + 1}(\log_3^2 x - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0; x > 0 \\ \log_3^2 x - 1 = 0 \\ 3^{2x+1} - 4.3^x + 1 \geq 0 \\ 3^{2x+1} - 4.3^x + 1 > 0 \\ \log_3^2 x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0; x > 0 \\ \log_3^2 x = 1 \\ 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 \geq 0 \\ 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 > 0 \\ \log_3^2 x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \vee 3^x = \frac{1}{3}; x > 0 \\ \log_3 x = \pm 1 \\ 3^x \geq 1 \vee 3^x \leq \frac{1}{3} \\ 3^x > 1 \vee 3^x < \frac{1}{3} \\ \log_3 x > 1 \vee \log_3 x < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -1; x > 0 \\ x = 3 \vee x = \frac{1}{3} \\ x \geq 0 \vee x \leq -1 \\ x > 0 \vee x < -1 \\ x > 3 \vee 0 < x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \vee x = \frac{1}{3} \\ x > 3 \vee 0 < x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 0 < x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{BÌNH LUẬN: } \sqrt{f(x)}g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)}g(x) = 0 \\ \sqrt{f(x)}g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0; x \in D[g(x)] \\ \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 4. Giải bất phương trình: $\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}(\log_3 x - 27)(2^x - 4) \geq 0$

Bài 5. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - \frac{7}{2}x + 14} \log_2 |x - 3| \leq 0$

Bài 6. Giải bất phương trình: $\sqrt{4 - x^2} \left(\log_3 \frac{x+1}{x} + 2 \right) \leq 0$

Bài 7. Giải bất phương trình: $\sqrt{\log_{\frac{1}{5}} |x - 2|} \left(x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{9}{5} \right) \geq 0$

Bài 8. Giải bất phương trình: $\sqrt{5 + 9x - 2x^2} (\cot^2 x + \cot x) \geq 0$

$$\text{XI. Dạng 11. } u(x)^{f(x)} \geq u(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u(x) < 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} ?$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) \geq 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

$$u(x)^{f(x)} \geq u(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u(x) \leq 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} ?$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải bất phương trình: $x^{\frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4}} \leq x$ (*)

• Sai lầm thường gặp:

$$(*) \Leftrightarrow x^{\frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4}} \leq x^1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4} \leq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4} - 1 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4} \geq 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4} - 1 \geq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{x^2+3x-4} \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{(x-1)(x+4)} \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ -4 < x < 1 \end{cases} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 1 < x \leq 2 \\ x < -4 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Với $x = 1$ thì (*) thỏa mãn nên cách giải trên đã làm mất nghiệm $x = 1$.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned}
 (*) \Leftrightarrow x^{\frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4}} \leq x^1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4} \leq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4} - 1 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4} \geq 1 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+2x-2}{x^2+3x-4} - 1 \geq 0 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{x^2+3x-4} \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{(x-1)(x+4)} \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{x^2+3x-4} \geq 0 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{(x-1)(x+4)} \geq 0 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ -4 < x < 1 \end{cases} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ 1 < x \leq 2 \\ x < -4 \end{cases} \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $(\sqrt[3]{x})^{2(x+1)} \leq (\sqrt{x})^{x^2}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow x^{\frac{2(x+1)}{3}} \leq x^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \frac{2(x+1)}{3} \leq \frac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ 3x^2 - 4x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x \geq 2 \vee x \leq -\frac{2}{3} \end{cases} \\ x > 1 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}) \quad \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 1$ thì (*) nghiệm đúng nên cách giải trên đã làm mất nghiệm $x = 1$.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow x^{\frac{2(x+1)}{3}} \leq x^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \frac{2(x+1)}{3} \leq \frac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ 3x^2 - 4x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{2(x+1)}{3} \geq \frac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 - 4x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x \geq 2 \vee x \leq -\frac{2}{3} \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -\frac{2}{3} \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Bài 3. Giải bất phương trình: $(\cos x)^{\lg x} \geq (\lg^2 x + 1)^{\cos^2 x}$ (*)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow (\cos x)^{\lg x} \geq \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{\cos^2 x} \Leftrightarrow (\cos x)^{\lg x} \geq (\cos x)^{-2\cos^2 x}. \text{ Do } \cos x \leq 1 \text{ nên}$$

$$(*) \Leftrightarrow \lg x \leq -2\cos^2 x \Leftrightarrow \lg x \leq \frac{-2}{\lg^2 x + 1} \Leftrightarrow \lg x (\lg^2 x + 1) \leq -2$$

$$\Leftrightarrow \lg^3 x + \lg x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (\lg x + 1)(\lg^2 x - \lg x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow \lg x + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lg x \leq -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = 2k\pi$ thì $\cos x = 1 \Rightarrow (\cos x)^{\lg x} = (\lg^2 x + 1)^{\cos^2 x} = 1$ nên (*) thoả mãn.

Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow (\cos x)^{\lg x} \geq \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{\cos^2 x} \Leftrightarrow (\cos x)^{\lg x} \geq (\cos x)^{-2\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x < 1 \\ \lg x \leq -2\cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \lg x \leq \frac{-2}{\lg^2 x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x \neq 2k\pi \\ \lg x (\lg^2 x + 1) \leq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x \neq 2k\pi \\ \lg^3 x + \lg x + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x \neq 2k\pi \\ ((\lg x + 1)(\lg^2 x - \lg x + 2)) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x \neq 2k\pi \\ \lg x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x \neq 2k\pi \\ \lg x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x \neq 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

BÌNH LUẬN: $u_{(x)}^{f(x)} \geq u_{(x)}^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) \geq 1 \\ f(x) \geq g(x) \\ u(x) \leq 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$

Hoặc $u_{(x)}^{f(x)} \geq u_{(x)}^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 1 \\ f(x) \geq g(x) \\ u(x) = 1 \\ u(x) < 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 4. Giải bất phương trình: $(x+3)^{x^2-5x+6} \geq 1$; $\sqrt{x^x} \geq x^{\sqrt{2x-3}}$

Bài 5. Giải bất phương trình: $\left(\frac{2}{x^2+1}\right)^{\sqrt{1+5x}} \leq \left(\frac{2}{x^2+1}\right)^{1-x}$

§3. SAI LÀM THƯỜNG GẶP TRONG HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. SAI LÀM TRONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Dạng 1: Sai lầm khi giải hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải biện luận hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax + (b-1)y = 4 \\ (1-b)x + ay = 3 \end{cases} \quad (I)$$

• **Sai lầm thường gặp:** Ta có $D = \begin{vmatrix} a & b-1 \\ 1-b & a \end{vmatrix} = a^2 + (b-1)^2$;

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & b-1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 4a - 3(b-1); \quad D_y = \begin{vmatrix} a & 4 \\ 1-b & 3 \end{vmatrix} = 3a + 4(b-1)$$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{4a - 3(b-1)}{a^2 + (b-1)^2}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{3a + 4(b-1)}{a^2 + (b-1)^2}$$

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ thì khi đó $D_x = D_y = 0$ nên hệ có vô số nghiệm.

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ thì (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4 \\ 0 = 3 \end{cases}$ nên hệ vô nghiệm.

• **Lời giải đúng:**

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{4a - 3(b-1)}{a^2 + (b-1)^2}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{3a + 4(b-1)}{a^2 + (b-1)^2}$$

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow D_x = D_y = 0$. Khi đó do $a_2 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Bài 2. Giải biện luận hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 1 \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 1 \end{cases} \quad (I)$$

• **Sai lầm thường gặp:**

Ta có:
$$D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a-b & 2a+b \end{vmatrix} = 6ab$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & a-b \\ 1 & 2a+b \end{vmatrix} = a+2b ; \quad D_y = \begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 2a-b & 1 \end{vmatrix} = -a+2b$$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a+2b}{6ab} ; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-a+2b}{6ab}$$

Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = D_y = 2b$ nên hệ vô nghiệm.

Nếu $\begin{cases} b=0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = -D_y = a$ nên hệ vô nghiệm.

Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = D_y = 0$ nên hệ vô số nghiệm.

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ thì khi đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \end{cases}$ nên hệ vô nghiệm.

• **Lời giải đúng:**

Ta có:
$$D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a-b & 2a+b \end{vmatrix} = 6ab$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & a-b \\ 1 & 2a+b \end{vmatrix} = a+2b ; \quad D_y = \begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 2a-b & 1 \end{vmatrix} = -a+2b$$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a+2b}{6ab} ; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-a+2b}{6ab}$$

Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = D_y = 2b \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Nếu $\begin{cases} b=0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = -D_y = a \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; c_1 = c_2 = 1 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

BÌNH LUẬN:

+ Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất: $x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}$

+ Nếu $\begin{cases} D=0 \\ D_x \neq 0 \text{ thì hệ vô nghiệm.} \\ D_y \neq 0 \end{cases}$

+ Nếu $\begin{cases} D=0 \\ D_x = D_y = 0 \\ a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases}$ thì hệ vô số nghiệm (đối với một ẩn số).

+ Nếu $\begin{cases} D=0 \\ D_x = D_y = 0 \\ a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \end{cases}$ thì hệ vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} D=0 \\ D_x = D_y = 0 \\ a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \\ c_1 = c_2 = 0 \end{cases}$ thì hệ vô nghiệm (đối với cả hai ẩn số).

2. Dạng 2: $\begin{cases} F(x) = G(x) \\ P(x) = G(x) \end{cases} \Leftrightarrow F(x) = P(x) ?$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 - x^2 - x + 4 = 0 \\ 2x^3 + x^2 + 2x + 5 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(I) \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - x + 4 = 2x^3 + x^2 + 2x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $\begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ thì (I) không nghiệm đúng, nên $\begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ là nghiệm ngoại lai.

• *Lời giải đúng:*

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x^2 - x + 4 = 2x^3 + x^2 + 2x + 5 \\ 2x^3 - x^2 - x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 = 0 \\ 2x^3 - x^2 - x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = -\frac{1}{2} \\ 2x^3 - x^2 - x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 3x - 16 = 0 \\ x^3 + x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 16 = -x^3 \\ x^2 - x - 4 = -x^3 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 16 = x^2 - x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Với $\begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}$ thì (I) không nghiệm đúng nên $\begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}$ là nghiệm ngoại lai.

• Lời giải đúng:

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 16 = -x^3 \\ x^2 - x - 4 = -x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 16 = -x^3 \\ x^2 - x - 4 = -x^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 16 = x^2 - x - 4 \\ x^2 - x - 4 = -x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 12 = 0 \\ x^2 - x - 4 = -x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

BÌNH LUẬN: $\begin{cases} F(x) = G(x) \\ P(x) = G(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) = G(x) \\ F(x) = P(x) \end{cases}$

$$\begin{cases} F(x) = G(x) \\ P(x) = G(x) \end{cases} \Rightarrow F(x) = P(x)$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \quad (I)$

Bài 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y \\ 4y^2 + z^2 = 8y \\ (2z - x)(x+3) = 5x + 16 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad (I)$

Bài 5. Giải biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x + 4a = 0 \\ a^2 x^2 + ax + 4a = 0 \end{cases}$

Bài 6. Giải biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2x + a = 0 \\ x^2 - 4x - 6a = 0 \end{cases}$

3. Dạng 3: Với $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in D[f(x)]$, có $\begin{cases} f(x) = f(y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ F(x, y) = 0 \end{cases} ?$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \quad (I) \quad \text{ĐT ĐH năm 2003 khối A}$

• **Sai lầm thường gặp:**

Xét $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Ta có $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$, nên:

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1) \vee \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \vee \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Hàm số $f(x) = x - \frac{1}{x}$ có $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nhưng $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \vee xy = -1 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \\ 2y = x^3 + 1 \\ xy = -1 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \\ x^3 - 2x + 1 = 0 \\ xy = -1 \\ x^4 + x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \\ (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \\ xy = -1 \\ \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ xy = -1 \\ x \in \emptyset \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = 1 \vee x = y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Bài 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x} = \frac{16y^4 - 1}{2y} \\ x^2 + 6xy + 4y^2 = 5 \end{cases} \quad (I)$$

• **Sai lầm thường gặp:**

Xét $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = 2y$, khi đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - \frac{1}{x} = t^3 - \frac{1}{t} \\ x^2 + 3xt + t^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 + 3xt + t^2 = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ 5x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ t = -1 \end{cases}$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Hàm số $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ có $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nhưng $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$

• **Lời giải đúng:**

Đặt $t = 2y$, khi đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - \frac{1}{x} = t^3 - \frac{1}{t} \\ x^2 + 3xt + t^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - t^3 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right) = 0 \\ x^2 + 3xt + t^2 = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-t)(x^2 + xt + t^2) + \frac{x-t}{xt} = 0 \\ x^2 + 3xt + t^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-t)\left(x^2 + xt + t^2 + \frac{1}{xt}\right) = 0 \\ x^2 + 3xt + t^2 = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 0 \\ x^2 + xt + t^2 + \frac{1}{xt} = 0 \\ x^2 + 3xt + t^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 0 \\ x^2 + 3xt + t^2 = 5 \\ x^2 + xt + t^2 + \frac{1}{xt} = 0 \\ x^2 + 3xt + t^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ 5x^2 = 5 \\ x^2 + t^2 = -xt - \frac{1}{xt} \\ x^2 + t^2 = 5 - 3xt \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ x=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t=1 \\ x=t=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2=-xt-\frac{1}{xt} \\ -xt-\frac{1}{xt}=5-3xt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2=-xt-\frac{1}{xt} \\ 2(xt)^2-5xt-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2=-xt-\frac{1}{xt} \\ xt=\frac{5\pm\sqrt{33}}{4} \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2=-xt-\frac{1}{xt} \\ xt=\frac{5\pm\sqrt{33}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xt=\frac{5-\sqrt{33}}{4} \\ x^2+t^2=-xt-\frac{1}{xt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xt=\frac{5-\sqrt{33}}{4} \\ x^2+t^2=\frac{74-10\sqrt{33}}{4(\sqrt{33}-5)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+t)^2=\frac{10\sqrt{33}-42}{4(\sqrt{33}-5)} \\ (x-t)^2=\frac{190-30\sqrt{33}}{4(\sqrt{33}-5)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+t=\pm\sqrt{\frac{10\sqrt{33}-42}{4(\sqrt{33}-5)}} \\ x-t=\pm\sqrt{\frac{190-30\sqrt{33}}{4(\sqrt{33}-5)}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{10\sqrt{33}-42}{4(\sqrt{33}-5)}}\pm\sqrt{\frac{190-30\sqrt{33}}{4(\sqrt{33}-5)}}\right) \\ t=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{10\sqrt{33}-42}{4(\sqrt{33}-5)}}\mp\sqrt{\frac{190-30\sqrt{33}}{4(\sqrt{33}-5)}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{10\sqrt{33}-42}{4(\sqrt{33}-5)}}\pm\sqrt{\frac{190-30\sqrt{33}}{4(\sqrt{33}-5)}}\right) \\ y=\frac{1}{4}\left(\pm\sqrt{\frac{10\sqrt{33}-42}{4(\sqrt{33}-5)}}\mp\sqrt{\frac{190-30\sqrt{33}}{4(\sqrt{33}-5)}}\right) \end{cases}$$

BÌNH LUẬN: Với $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in D[f(x)]$ và $y = f(x)$ liên tục trên $D[f(x)]$,

$$\text{thì } \begin{cases} f(x) = f(y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x+1=y^3+y^2+y \\ 2y+1=z^3+z^2+z \\ 2z+1=x^3+x^2+x \end{cases}$$

Bài 4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x=2y^2+5y+2 \\ y=2z^2+5z+2 \\ z=2x^2+5x+2 \end{cases}$$

II. SAI LẦM TRONG GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Dạng 1: $\begin{cases} F(x, y) \cdot G(x, y) \geq 0 \\ G(x, y) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x, y) \geq 0 \\ G(x, y) \geq 0 \end{cases} ?$

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad (I)$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = 1$ thì (I) nghiệm đúng, nên $x = 1$ là nghiệm của (I).

Cách giải trên đã làm mất nghiệm của hệ phương trình.

• *Lời giải đúng:*

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) = 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ \begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Bài 2. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 + 4x - 12 \geq 0 \\ x \geq -6 \end{cases} \quad (I)$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-2) \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với $x = -6$ thì (I) thoả mãn. Cách giải trên đã làm mất nghiệm $x = -6$.

• **Lời giải đúng:**

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-2) \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=0 \\ x-2 \geq 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ x \geq 2 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Bài 3. Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} \cotg \frac{x}{2} \geq \tg \frac{x}{2} \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \quad (I)$$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg \frac{x}{2} - \tg \frac{x}{2} \geq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cotg x \geq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg x \geq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x} \geq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sin x} \leq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \pi + 2k\pi < x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ thì $\begin{cases} \cotg \frac{x}{2} - \tg \frac{x}{2} = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$ nên (I) thỏa mãn.

Cách giải trên đã làm mất nghiệm.

• **Lời giải đúng:**

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg \frac{x}{2} - \tg \frac{x}{2} \geq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cotg x \geq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg x \geq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x} \geq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x < 0 \\ \frac{\cos x}{\sin x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x < 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \pi + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Bài 4. Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} \cos^4 x - \sin^4 x \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \quad (I)$$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Với $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ thì $\begin{cases} \cos^4 x - \sin^4 x = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{cases}$ nên (I) thoả mãn.

Cách giải trên đã làm mất nghiệm $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

• **Lời giải đúng:**

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0 \\ (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) > 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \\ (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) > 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \\ \cos x - \sin x > 0 \\ \cos x + \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = 1 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

BÌNH LUẬN: $\begin{cases} F(x, y) \cdot G(x, y) \geq 0 \\ G(x, y) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G(x, y) = 0 \\ F(x, y) \geq 0 \\ G(x, y) > 0 \end{cases}$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 5. Giải biện luận hệ bất phương trình: $\begin{cases} (x-1)^2(x-2a) \leq 0 \\ (x+2)(x+a)^2 \leq 0 \end{cases}$

Bài 6. Giải biện luận hệ bất phương trình: $\begin{cases} (x^2-1)(x-2) \geq 0 \\ (x-a)^2[x-(2a+1)] \leq 0 \end{cases}$

2. Dạng 2: $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow a + c > b + d$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giải biện luận hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ x^2 - 4x + m > 0 \end{cases} \quad (I)$$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(I) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < x^2 - 4x + m \Leftrightarrow x < m - 2$$

• **Lời giải đúng:**

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 & (1) \\ x^2 - 4x + m > 0 & (2) \end{cases} \quad \text{Ta có: } \Delta'_{(2)} = 4 - m$$

• Nếu $\Delta'_{(2)} < 0 \Leftrightarrow m > 4$ thì $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$

• Nếu $\Delta'_{(2)} = 0 \Leftrightarrow m = 4$ thì $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$

• Nếu $\Delta'_{(2)} > 0 \Leftrightarrow m < 4$ thì $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ \begin{cases} x > 2 + \sqrt{\Delta'_{(2)}} \\ x < 2 - \sqrt{\Delta'_{(2)}} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < 2 - \sqrt{\Delta'_{(2)}} \end{cases}$

+ Nếu $m > 3 \Rightarrow 1 < 2 - \sqrt{\Delta'_{(2)}}$ nên $(I) \Leftrightarrow 1 < x < 2 - \sqrt{\Delta'_{(2)}}$

+ Nếu $m \leq 3 \Rightarrow 1 \geq 2 - \sqrt{\Delta'_{(2)}}$ nên $(I) \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Kết luận: • Nếu $m \geq 4$ thì nghiệm của (I) là $1 < x < 2$

• Nếu $3 < m < 4$ thì nghiệm của (I) là $1 < x < 2 - \sqrt{\Delta'_{(2)}}$

• Nếu $m \leq 3$ thì (I) vô nghiệm.

III. SAI LÂM TRONG CÁC BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tìm a để tập nghiệm $\sin^2 x = 2a^2 - a$ (1) và $\cos 2x = 3 - 4a$ (2) trùng nhau

• *Sai lầm thường gặp:*

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 3 - 4a \Leftrightarrow \sin^2 x = 2a - 1$

Vậy ycbt $\Leftrightarrow 2a^2 - a = 2a - 1 \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = \frac{1}{2}$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Cách giải trên đã tính chất của hàm số $y = \sin^2 x$ là có tập giá trị $[0, 1]$

• *Lời giải đúng:*

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 3 - 4a \Leftrightarrow \sin^2 x = 2a - 1$

Vậy YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 2a - 1 \leq 1 \\ 2a^2 - a = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq a \leq 1 \\ 2a^2 - 3a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \vee a = \frac{1}{2}$

Bài 2. Giải biện luận phương trình: $(x + 2)\sqrt{x + a} = 0$ (*)

• *Sai lầm thường gặp:*

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -a \end{cases}$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Cách giải trên đã tách tập xác định của hàm tích nên đã mở rộng tập xác định.

• *Lời giải đúng:*

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x \geq -a \end{cases}$

Nếu $a > 2$ thì (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -a \end{cases}$

Nếu $a = 2$ thì (*) $\Leftrightarrow x = -2$

Nếu $a < 2$ thì (*) $\Leftrightarrow x = -a$

Bài 3. Tìm a để $\frac{x^2 - (3a-1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$ (*) có nghiệm duy nhất.

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (3a-1)x + 2a^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = 2a - 2 \\ x = x_2 = a + 1 \\ x \neq -1; x \neq 4 \end{cases}$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -1 \vee x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \vee x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2 = a + 1 \\ 2a - 2 = -1 \\ 2a - 2 = 4 \\ a + 1 = -1 \\ a + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{1}{2} \\ a = 3 \\ a = -2 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{1}{2} \\ a = -2 \end{cases}$$

• **Lời giải đúng:**

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (3a-1)x + 2a^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = 2a - 2 \\ x = x_2 = a + 1 \\ x \neq -1; x \neq 4 \end{cases}$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \neq \{-1; 4\} \\ \begin{cases} x_1 = -1 \vee x_1 = 4 \\ x_2 \neq -1; x_2 \neq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -1 \vee x_2 = 4 \\ x_1 \neq -1; x_1 \neq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2 = a + 1 \neq \{-1; 4\} \\ \begin{cases} 2a - 2 = -1 \\ a + 1 \neq -1; a + 1 \neq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a - 2 = 4 \\ a + 1 \neq -1; a + 1 \neq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a + 1 = -1 \\ 2a - 2 \neq -1; 2a - 2 \neq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a + 1 = 4 \\ 2a - 2 \neq -1; 2a - 2 \neq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3; a \neq -2; a \neq 3 \\ a = \frac{1}{2}; a \neq -2; a \neq 3 \\ a = 3; a \neq -2; a \neq 3 \\ a = -2; a \neq \frac{1}{2}; a \neq 3 \\ a = 3; a \neq \frac{1}{2}; a \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -2 \end{cases}$$

Bài 4. Tìm a để $\begin{cases} (\cotg x - 1)(x - a) = 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ (I) chỉ có 1 nghiệm.

• Sai lầm thường gặp 1:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg x = 1 \\ x = a \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg x = 1 \\ -1 < x < 1 \\ x = a \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ -1 < x < 1 \\ x = a \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = a \\ -1 < x < 1 \end{cases} \quad (I)$$

Do (I) luôn có nghiệm $x = \frac{\pi}{4}$ nên ycbt $\Leftrightarrow$ (II) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ a \leq -1 \end{cases}$

• Sai lầm thường gặp 2:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg x = 1 \\ x = a \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg x = 1 \\ -1 < x < 1 \\ x = a \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ -1 < x < 1 \\ x = a \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = a \\ -1 < x < 1 \end{cases} \quad (I)$$

Do (I) luôn có nghiệm $x = \frac{\pi}{4}$ nên ycbt $\Leftrightarrow$ (II) vô nghiệm hoặc có nghiệm $\frac{\pi}{4}$
 $\Leftrightarrow a \geq 1 \vee a \leq -1 \vee a = \frac{\pi}{4}$

• Lời giải đúng:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg x = 1 \\ x = a \\ \sin x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cotg x = 1 \\ -1 < x < 1 \\ x = a \\ \sin x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ -1 < x < 1 \\ x = a \\ x \neq k\pi \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = a \\ x \neq k\pi \\ -1 < x < 1 \end{cases} \quad (II)$$

Do (I) luôn có nghiệm $x = \frac{\pi}{4}$ nên ycbt $\Leftrightarrow$ (II) vô nghiệm hoặc có nghiệm $\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow a \geq 1 \vee a \leq -1 \vee a = \frac{\pi}{4} \vee a = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 5. Tìm a để $\begin{cases} (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(x - a) = 0 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$ (I) có nghiệm duy nhất.

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ x = a \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ 1 \leq x < 2 \\ x = a \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ 1 \leq x < 2 \\ x = a \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = a \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad (II)$$

Do (I) luôn có nghiệm $x = \frac{\pi}{3}$ nên ycbt $\Leftrightarrow$ (II) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2 \\ a < 1 \end{cases}$

• **Lời giải đúng:**

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ \begin{cases} x = a \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ 1 \leq x < 2 \\ \begin{cases} x = a \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ 1 \leq x < 2 \\ \begin{cases} x = a \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ \begin{cases} x = a \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad (II)$$

Do (I) luôn có nghiệm $x = \frac{\pi}{3}$ nên ycbt $\Leftrightarrow$ (II) vô nghiệm hoặc có nghiệm $\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow a \geq 2 \vee a < 1 \vee a = \frac{\pi}{3} \vee a = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Bài 6. Tìm a để $\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ (I) tương đương với $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ (II)

• **Sai lầm thường gặp:**

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = k\pi \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \text{ nên ycbt } \Leftrightarrow k\pi = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

• **Lời giải đúng:**

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=k\pi \\ x^2+y^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=k\pi \\ (x+y)^2-2xy=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=k\pi \\ xy=\frac{k^2\pi^2-a}{2} \end{cases}$$

Do đó x, y là nghiệm của: $X^2 - k\pi X + \frac{k^2\pi^2 - a}{2} = 0$ (1)

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ (x+y)^2-2xy=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-\frac{a}{2} \end{cases}. \text{ Do đó } x, y \text{ là nghiệm của: } X^2 - \frac{a}{2} = 0 \quad (2)$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow (1) \text{ tương đương với } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0; \Delta_2 < 0 \\ \Delta_1 \geq 0; \Delta_2 \geq 0 \\ k\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < \frac{k^2\pi^2}{2} \\ k = 0 \end{cases}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 7. Tìm a để tập nghiệm $4\cos^2 x = a^2 - 6$ và $1 - \cos 2x = \frac{a}{6}$ trùng nhau.

Bài 8. Tìm a để $x^2 + 2(a-3)x + 9 - 2a = 0$ có chỉ 1 nghiệm thỏa $x < 2$.

Bài 9. Tìm a để $(a+1)2^{2x} + 2^x + 3 - a = 0$ có nghiệm duy nhất.

Bài 10. Tìm a để $\frac{x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0$ có nghiệm duy nhất.

Bài 11. Tìm a để $\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0 \\ x(y+1-a) + y(2a-3) + a+3 = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 12. Tìm a để $\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 9} \\ 5x - 4y + a = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 13. Tìm a để $(a-9)9^x + (a+1)3^x + 2a - 1 = 0$ vô nghiệm.

Bài 14. Tìm a để $\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

CHƯƠNG III: CÁC SAI LẦM VÀ THIẾU SÓT THƯỜNG GẶP KHI TÍNH GIỚI HẠN HÀM SỐ

I. Dạng 1: Giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tính giới hạn $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = 2\sqrt{2} \cdot 1 = 2\sqrt{2}$$

• **Lời giải đúng:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 \sin^2 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} |\sin 2x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2\sqrt{2} \sin 2x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -2\sqrt{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = -2\sqrt{2} \cdot 1 = -2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 \sin^2 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} |\sin 2x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2} \sin 2x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sin x}{2x} = 2\sqrt{2} \cdot 1 = 2\sqrt{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra giới hạn không tồn tại. Chỉ tồn tại các giới hạn phải, trái.

Bài 2. Tính giới hạn $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}}{x}$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{4 - x^2})(2 + \sqrt{4 - x^2})}}{x(2 + \sqrt{4 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - (4 - x^2)}}{x \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \frac{1}{2}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã sai lầm khi coi $\sqrt{x^2} = x$.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{4 - x^2})(2 + \sqrt{4 - x^2})}}{x(2 + \sqrt{4 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4 - (4 - x^2)}}{x \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \frac{1}{2} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{4 - x^2})(2 + \sqrt{4 - x^2})}}{x(2 + \sqrt{4 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4 - (4 - x^2)}}{x \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2 + \sqrt{4}}} = -\frac{1}{2} \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra giới hạn không tồn tại. Chỉ tồn tại các giới hạn phải, trái.

Bài 3. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$

• **Thiêu sót thường gặp:** Sử dụng qui tắc Lopitan ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1} = \frac{-\sin 0}{\cos 0} = 0$$

• **Nguyên nhân thiếu sót:**

Cách giải trên sử dụng quy tắc Lopitan dạng vô định $\frac{0}{0}$ mà trong chương trình phổ thông không được sử dụng quy tắc này.

• **Lời giải đúng:**

Sử dụng công thức trong SGK 12: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{\cos x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} \right] = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{4} = 1 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

II. Dạng 2: Giới hạn vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^2 + 1}}{x}$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^2 + 1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5x^2 + 1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \sqrt{5 + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Phép biến đổi từ $x = \sqrt{x^2}$ là không tương đương.

• *Lời giải đúng:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + 1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{5 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + 1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5x^2 + 1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{5 + \frac{1}{x^2}} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra giới hạn không tồn tại. Chỉ tồn tại các giới hạn phải, trái.

Bài 2. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}}} = 2$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Phép biến đổi từ $x - \frac{1}{2}$ thành $\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$ là không tương đương.

• **Lời giải đúng:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}} = -2$$

Từ (1) và (2) suy ra giới hạn không tồn tại. Chỉ tồn tại các giới hạn phải, trái.

Bài 3. Tính giới hạn $l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}}$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép biến đổi từ $\operatorname{tg} x = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$ là không tương đương.

• **Lời giải đúng:**

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+0}} = -1 \quad (1)$$

Từ (1) và (2) suy ra giới hạn không tồn tại. Chỉ tồn tại các giới hạn phải, trái.

BÌNH LUẬN: $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$

III. Dạng 3: Giới hạn vô định dạng $0 \cdot \infty$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

• **Thiếu sót thường gặp:** Biến đổi và sử dụng qui tắc Lopitan ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

• **Nguyên nhân thiếu sót:**

Từ dạng vô định $0 \cdot \infty$ chuyển sang dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ để sử dụng quy tắc

Lopitan nhưng quy tắc này không được phép sử dụng trong chương trình phổ thông.

• **Lời giải đúng:**

Do $x \rightarrow 0^+$ nên chỉ cần xét với $0 < x < e$. Khi đó: $0 < |x \ln x| < |x \ln e| = |x| = x$.

Mà $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ nên theo nguyên lý giới hạn kẹp giữa $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} |x \ln x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

Bài 2. Tính giới hạn: $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$

• **Sai lầm thường gặp:** $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \infty = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

• **Nguyên nhân sai lầm:** $\sin \infty = 1$

• **Lời giải đúng:** $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$ mà $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

• **BÌNH LUẬN:**

+ Không được phép sử dụng trong chương trình phổ thông quy tắc Lopitan để tính giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ hay giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$.

IV. Dạng 4: Giới hạn vô định dạng 1^∞ ?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^{3x-2}$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{2x-3} \right)^{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^{3x-2} = 1^\infty = 1$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Cách giải trên đã sai lầm khi cho rằng $1^\infty = 1$

• *Lời giải đúng:*

Sử dụng giới hạn cơ bản $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$, ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^{3x-2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{2x-3} \right)^{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{6}} \right)^{9 \cdot \frac{2x-3}{6} + \frac{1}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{6}} \right)^{\frac{2x-3}{6}} \right]^9 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{6}} \right)^{\frac{2x-3}{6}} \right]^9 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{\frac{2x-3}{6} \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{6}} \right)^{\frac{2x-3}{6}} \right]^9 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} = e^9 \cdot 1^{\frac{1}{2}} = e^9 \end{aligned}$$

Bài 2. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \tan^2 x \right)^{\frac{1}{x \sin x}}$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \tan^2 x \right)^{\frac{1}{x \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 1^{\frac{1}{x \sin x}} = 1^\infty = 1$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã sai lầm khi tính $\lim_{x \rightarrow 0} 1^{\frac{1}{x \sin x}} = 1^\infty = 1$.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1}{x \sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^{\cotg^2 x \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\cotg^2 x}\right)^{\cotg^2 x} \right]^{\frac{\sin x}{x \cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\cotg^2 x}\right)^{\cotg^2 x} \right]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x}} = e \end{aligned}$$

BÌNH LUẬN:

+ $\lim_{x \rightarrow x_0} 1^\infty$ chưa chắc đã bằng 1

+ Khi tính các giới hạn có dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} 1^\infty$ thường sử dụng công thức giới hạn

$$\lim_{u(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e \text{ để tính toán.}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 3. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3x}{2 + 3x}\right)^{6x+5}$

Bài 4. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cotg^2 x}$

Bài 5. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

Bài 6. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cotg \pi x}$

Bài 7. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

Bài 8. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos ax}{1 + \sin x \cos bx}\right)^{\cotg^3 x}$

V. Dạng 5: Giới hạn dạng $\infty - \infty$?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã không xét các giới hạn riêng: $x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Khi } x \rightarrow -\infty \text{ thì } -x \rightarrow +\infty \text{ nên } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = +\infty \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra không tồn tại giới hạn mà chỉ tồn tại các giới hạn trái, phải.

BÌNH LUẬN:

$$+ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha \end{cases}$$

+ Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ thì không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

VI. Dạng 6: Giới hạn của tổng vô hạn các đại lượng vô cùng bé ?

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

• *Sai lầm thường gặp:*

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 0$ nên:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \underbrace{0+0+\dots+0}_{n \text{ số}} = 0$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Tổng vô hạn các đại lượng có giới hạn 0 chưa chắc đã có giới hạn 0, tức là các phép toán giới hạn tổng, hiệu chỉ phát biểu cho hữu hạn các số hạng.

• *Lời giải đúng:*

Do $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+0}} = \frac{1}{n} \quad \forall k = \overline{1, n}$ nên:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{n} = 1$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

Bài 2. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$

• *Sai lầm thường gặp:*

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{2\pi}{n} = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = 0$ nên:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] = 0(0 + 0 + \dots + 0) = 0$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Tổng vô hạn các đại lượng có giới hạn 0 chưa chắc đã có giới hạn 0, tức là các phép toán giới hạn tích, thương chỉ phát biểu cho hữu hạn các số hạng.

• **Lời giải đúng:**

Đặt $A_n = \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$ ta có:

$$\begin{aligned} 2n A_n \sin \frac{\pi}{2n} &= \left[2 \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + 2 \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] = \\ &= \left[\cos \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{3\pi}{2n} \right] + \left[\cos \frac{3\pi}{2n} - \cos \frac{5\pi}{2n} \right] + \dots + \left[\cos \frac{(2n-3)\pi}{2n} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right] = \\ &= \cos \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{(n-1)\pi}{2} = 2 \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \\ \Rightarrow A_n &= \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{2}}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

BÌNH LUẬN:

- + Tổng vô hạn các đại lượng có giới hạn 0 chưa chắc đã có giới hạn 0
- + Thường sử dụng phép đánh giá kẹp giữa và phép biến đổi phân tích để tính toán các Tổng vô hạn các đại lượng có giới hạn 0

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 3. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

Bài 4. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^n} + \frac{3^3}{n^n} + \dots + \frac{n^n}{n^n} \right)$

CHƯƠNG IV: CÁC SAI LÂM VÀ THIẾU SÓT THƯỜNG GẶP KHI KHẢO SÁT HÀM SỐ

§1. SAI LÂM KHI XÉT TÍNH LIÊN TỤC TẠI 1 ĐIỂM CỦA HÀM SỐ

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$

• Sai lầm thường gặp:

Do $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\lim_{x \rightarrow 0} 3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ và $f(0) = 0$ nên hàm

số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

• Nguyên nhân sai lầm:

Lời giải trên không đúng do không xét giới hạn trái và giới hạn phải tại $x = 0$.

• Lời giải đúng:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+3^{+\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = 0$ (1)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+3^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{|x|\sin x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.

• Sai lầm thường gặp:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{|x|\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{|x|\sin x(1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{|x|\sin x(1+\sqrt{\cos x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{|x|}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} \right] = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos 0}} = \frac{1}{4}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Lời giải trên không đúng do tính sai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{\sin x}$.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x \sin x (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \sin x (1 + \sqrt{\cos x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} \right] = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos 0}} = \frac{1}{4} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{(-x) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1 - \cos x}{x \sin x (1 + \sqrt{\cos x})} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \sin x (1 + \sqrt{\cos x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} \right] = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos 0}} = -\frac{1}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

BÌNH LUẬN: Sai lầm khi xét tính liên tục tại một điểm của hàm số thường do chưa nắm vững các quy tắc tính giới hạn hàm số.

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Xét tính liên tục của $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x^n}$ với $x \geq 0$

Bài 2. Xét tính liên tục của $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$

§2. SAI LÂM TRONG CÁC BÀI TOÁN ĐẠO HÀM

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

• **Sai lầm thường gặp:**

Ta có: $f(0) = 0$ nên $f'(0) = [f(0)]' = (0)' = 0$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Nếu tính đạo hàm của hàm số tại 1 điểm bằng cách gán giá trị đối số để tìm giá trị hàm số rồi lấy đạo hàm thì với mọi hàm số và tại mọi điểm thuộc miền xác định của hàm số đều cho kết quả bằng 0.

• **Lời giải đúng:**

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Bài 2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

• **Sai lầm thường gặp:**

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \sin \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \right) = \sin(\infty) = 1$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã sai lầm khi cho $\sin(\infty) = 1$.

• **Lời giải đúng:**

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{Chọn } x = \frac{1}{m\pi} \xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{x \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sin m\pi = 0 \quad (1)$$

$$\text{Chọn } x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow[n \in \mathbb{Z}]{x \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ suy ra không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$

Bài 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(\ln(\ln \dots \ln(2048 \sin^2 x)))}{2000 \text{ dấu ln}}$ tại $x = 0$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$f'(x) = \left[\frac{\ln(\ln(\ln \dots \ln(2048 \sin^2 x)))}{2000 \text{ dấu ln}} \right]' = \frac{1}{\ln(\ln(\ln \dots \ln(2048 \sin^2 x)))} \times$$

$$\times \frac{1}{\ln(\ln(\ln \dots \ln(2048 \sin^2 x)))} \times \dots \times \frac{1}{\ln 2048 \sin^2 x} \times \frac{1}{2048 \sin^2 x} \times 2048 \times 2 \sin x \cos x$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Chúng ta dễ bị mắc lừa khi sử dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp mà không kiểm tra hàm số này có tồn tại hay không.

• **Lời giải đúng:**

$$2048 \sin^2 x \leq 2048 = 2^{11} \Rightarrow \ln(2048 \sin^2 x) \leq \ln 2^{11} = 11 \ln 2 < 11$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(2048 \sin^2 x)) < \ln 11 < 4 \Rightarrow \ln(\ln(\ln(2048 \sin^2 x))) < \ln 4 < 2$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\ln(\ln(2048 \sin^2 x)))) < \ln 2 < 1$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\ln(\ln(\ln(2048 \sin^2 x))))) < \ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Không tồn tại } \ln(\ln(\ln(\ln(\ln(\ln(2048 \sin^2 x))))))$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại $f(x) = \underbrace{\ln(\ln(\ln \dots \ln(2048 \sin^2 x)))}_{2000 \text{ dấu } \ln} \Rightarrow$ Không thể tính $f'(x)$

Bài 4. Tính giá trị của hàm số $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = c \text{ với } x \neq 0. \text{ Xét thấy: } f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \neq 0$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Nếu $f(x) = c$ với $x \in (a, b)$ thì $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Ngược lại, nếu $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ thì $f(x) = c \quad \forall x \in (a, b)$.

Lời giải trên đã coi $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ như $(-\infty, +\infty)$

• **Lời giải đúng:**

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = c \text{ với } x \neq 0 \text{ hay } f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{nếu } x > 0 \\ c_2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét thấy: } f(1) = \frac{\pi}{2}, f(-1) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{nếu } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Bài 5. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos x}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

• **Thiếu sót thường gặp:**

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln \cos x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-1}{2 \cos x} = 1 \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân thiếu sót:**

Cách giải trên sử dụng quy tắc Lôpital dạng vô định $\frac{0}{0}$ mà trong chương trình phổ thông không được sử dụng quy tắc này.

• **Lời giải đúng:**

Sử dụng giới hạn cơ bản trong chương trình phổ thông $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ ta có:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln \cos x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln \left[1 + \left(-2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \right]}{-2 \sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \left(-2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \right]}{-2 \sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $f(x) = \frac{x^2 - 2|x+3|}{3x-1}$. Tính đạo hàm của hàm số tại $x = 3$

Bài 2. $F(x) = |x| - \ln(1+|x|)$ và $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Chứng minh rằng: $F'(x) = f(x)$

§3. SAI LÂM TRONG CÁC BÀI TOÁN XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{-3x+5}{2x-m}$ đồng biến $\forall x \in (2, +\infty)$

• Sai lầm thường gặp:

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (2, +\infty) \Leftrightarrow \frac{3m-10}{(2x-m)^2} \geq 0 \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 3m-10 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{10}{3}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Khi giải biện luận bất phương trình có mẫu thức chứa tham số $(2x-m)^2$, phải đặt điều kiện $2x-m \neq 0 \quad \forall x \in (2, +\infty) \Leftrightarrow m \leq 4$

• Lời giải đúng:

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (2, +\infty) \Leftrightarrow \frac{3m-10}{(2x-m)^2} \geq 0 \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-10 \geq 0 \\ 2x-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{10}{3} \\ x \neq \frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{10}{3} \\ \frac{m}{2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{10}{3} \leq m \leq 4$$

Bài 2. Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{x-m}$ đồng biến $\forall x \in (1, +\infty)$

• Sai lầm thường gặp:

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1, +\infty) \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} \geq 0 \quad \forall x \in (1, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1 \geq 0 \quad \forall x \in (1, +\infty). \text{ Ta có: } \Delta' = 2(m+1)^2 \geq 0$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.f(1) \geq 0 \\ 1 \geq \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m^2 - 6m + 1) \geq 0 \\ 1 \geq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 + \sqrt{8} \\ m \leq 3 - \sqrt{8} \Leftrightarrow m \leq 3 - \sqrt{8} \\ m \leq 1 \end{cases}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Khi giải biện luận bất phương trình có mẫu thức chứa tham số $(x-m)^2$, phải đặt điều kiện $x-m \neq 0 \quad \forall x \in (1, +\infty) \Leftrightarrow m \leq 1$.

• Lời giải đúng:

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1, +\infty) \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} \geq 0 \quad \forall x \in (1, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1 \geq 0 \quad \forall x \in (1, +\infty) \\ x - m \neq 0 \end{cases} \quad \text{Ta có: } \Delta' = 2(m+1)^2 \geq 0$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.f(1) \geq 0 \\ 1 \geq \frac{S}{2} \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.(m^2 - 6m + 1) \geq 0 \\ 1 \geq m \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 + \sqrt{8} \\ m \leq 3 - \sqrt{8} \Leftrightarrow m \leq 3 - \sqrt{8} \\ m \leq 1 \end{cases}$$

Bài 3. Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

• Sai lầm thường gặp:

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 2 \\ f'(x) \geq 0 \quad \forall x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \quad \forall x \geq 2 \\ 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \quad \forall x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 5 \geq 12m(x-1) \quad \forall x \geq 2 \\ 3x^2 - 6x + 5 \geq 12m(x-1) \quad \forall x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{x-1} \geq 12m \quad \forall x \geq 2 \\ g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{x-1} \leq 12m \quad \forall x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \min_{x \geq 2} g(x) \geq 12m \\ \max_{x \leq -1} g(x) \leq 12m \end{cases} \quad \text{Ta có: } g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} > -1 \\ x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} < 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow g'(x) > 0$ trên khoảng $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \min_{x \geq 2} g(x) \geq 12m \\ \max_{x \leq -1} g(x) \leq 12m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(2) = 5 \geq 12m \\ g(-1) = -7 \leq 12m \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq m \leq \frac{5}{12}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Cách giải trên phù hợp với yêu cầu $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty, -1]$ và khoảng $[2, +\infty)$. Còn với yêu cầu $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ thì cần kiểm tra thêm điều kiện: $f(-1) < f(2)$

• Lời giải đúng:

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 2 \\ f'(x) \geq 0 \quad \forall x \leq -1 \\ f(-1) < f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \quad \forall x \geq 2 \\ 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \quad \forall x \leq -1 \\ -18m < 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 5 \geq 12m(x-1) \quad \forall x \geq 2 \\ 3x^2 - 6x + 5 \geq 12m(x-1) \quad \forall x \leq -1 \\ m > -\frac{15}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{x-1} \geq 12m \quad \forall x \geq 2 \\ g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{x-1} \leq 12m \quad \forall x \leq -1 \\ m > -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \min_{x \geq 2} g(x) \geq 12m \\ \max_{x \leq -1} g(x) \leq 12m \end{cases} \text{ Ta có: } g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} > -1 \\ x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} < 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow g'(x) > 0$ trên khoảng $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \min_{x \geq 2} g(x) \geq 12m \\ \max_{x \leq -1} g(x) \leq 12m \\ m > -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(2) = 5 \geq 12m \\ g(-1) = -7 \leq 12m \\ m > -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq m \leq \frac{5}{12}$$

Bài 4. Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{mx^2 + x + m}{x-1}$ đồng biến $\forall x \in (3, +\infty)$

• **Cách 1:** Phương pháp tam thức bậc 2

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{mx^2 - 2mx - m - 1}{(x-1)^2} \geq 0 \quad \forall x \in (3, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = mx^2 - 2mx - m - 1 \geq 0 \quad \forall x \in (3, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = 2m^2 + m \leq 0 \\ m \cdot g(3) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 0 \text{ (loại)} \\ m > 0 \\ m \geq 0 \\ m \leq -\frac{1}{2} \\ m(2m-1) \geq 0 \\ 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \geq 0 \\ m \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2} \\ m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \end{cases}$$

• **Cách 2:** Phương pháp hàm số

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{mx^2 - 2mx - m - 1}{(x-1)^2} \geq 0 \quad \forall x \in (3, +\infty)$$

Do $f'(x)$ liên tục tại $x = 3$ nên $f'(x) \geq 0 \quad \forall x > 3 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 3$

$$\Leftrightarrow g(x) = mx^2 - 2mx - m - 1 \geq 0 \quad \forall x \in [3, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x - 1) \geq 1 \quad \forall x \geq 3. \text{ Do } x^2 - 2x - 1 = x(x-3) + x - 1 > 0 \quad \forall x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 1} \leq m \quad \forall x \geq 3 \Leftrightarrow \max_{x \geq 3} \varphi(x) \leq m$$

$$\text{Ta có: } \varphi'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x-1)^2} < 0 \quad \forall x \geq 3 \Rightarrow \varphi(x) \text{ nghịch biến trên } [3, +\infty)$$

$$\text{Vậy } \max_{x \geq 3} \varphi(x) \leq m \Leftrightarrow \varphi(3) = \frac{1}{2} \leq m$$

§4. SAI LẦM TRONG CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tìm cực trị của hàm số $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$

• *Sai lầm thường gặp:*

Đặt $t = \cos x, t \in [-1, 1], \Rightarrow y = t + \frac{1}{2}(2t^2 - 1) = t^2 + t - \frac{1}{2}$. Đạo hàm: $y' = 2t + 1$

Xét: $y' = 0 \Leftrightarrow 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Do tìm các điểm cực trị theo x nên khi đổi biến số và lấy đạo hàm thì cần sử dụng công thức đạo hàm cho hàm hợp. Lời giải cần sử dụng công thức

$$y'(x) = y'(t) \cdot t'(x)$$

• *Lời giải đúng:*

Cách 1: Đặt $t = \cos x, t \in [-1, 1] \Rightarrow y = t + \frac{1}{2}(2t^2 - 1) = t^2 + t - \frac{1}{2}$.

Đạo hàm: $y'(x) = y'(t) \cdot t'(x) = (2t + 1)(-\sin x) = -\sin x(2 \cos x + 1)$

Xét: $y' = 0 \Leftrightarrow -\sin x(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = k\pi \\ x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$y'' = -2 \cos 2x - \cos x \Rightarrow \begin{cases} y''(x_1) = -2 - \cos k\pi < 0 \\ y''(x_2) = -3 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(x_1) = y_{\text{CD}} = \frac{3}{2} \text{ nếu } k \text{ chẵn} \\ y(x_1) = y_{\text{CD}} = -\frac{1}{2} \text{ nếu } k \text{ lẻ} \\ y(x_2) = y_{\text{CT}} = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Cách 2: $y' = \left(\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right)' = -\sin x + \frac{1}{2}(-2 \sin 2x) = -\sin x - \sin 2x =$
 $= -\sin x - 2 \sin x \cos x = -\sin x(1 + 2 \cos x)$

Xét: $y' = 0 \Leftrightarrow -\sin x(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = k\pi \\ x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$y'' = -2 \cos 2x - \cos x \Rightarrow \begin{cases} y''(x_1) = -2 - \cos k\pi < 0 \\ y''(x_2) = -3 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(x_1) = y_{CD} = \frac{3}{2} \text{ nếu } k \text{ chẵn} \\ y(x_1) = y_{CD} = -\frac{1}{2} \text{ nếu } k \text{ lẻ} \\ y(x_2) = y_{CT} = -\frac{3}{4} \end{cases}$

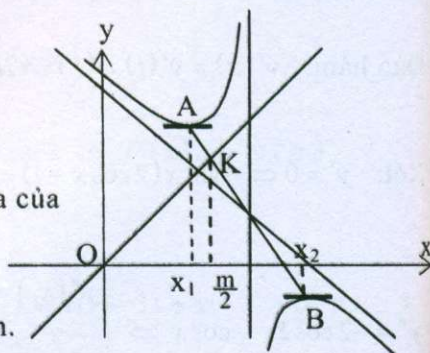
Bài 2. Tìm m để hàm số $y = \frac{-x^2 + 2mx - 5}{x - 1}$ có cực đại, cực tiểu nằm về 2 phía của đường thẳng $y = 2x$

• Sai lầm thường gặp:

Đặt $u(x) = -x^2 + 2mx - 5$

Hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về 2 phía của đường $(\Delta): y = 2x$

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ bên.



$\Leftrightarrow \begin{cases} u(1) = 2m - 6 \neq 0 \\ \frac{-x^2 + 2mx - 5}{x - 1} = 2x \text{ vô nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 3x^2 - 2(m + 1)x + 5 = 0 \text{ vô nghiệm} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \Delta' = m^2 + 2m - 14 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 - \sqrt{15} < m < -1 + \sqrt{15} \end{cases}$

$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{15} < m < -1 + \sqrt{15}$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã xét thiếu trường hợp $(\Delta): y = 2x$ có thể cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt trên cùng 1 nhánh Hypecbol và Cực đại, Cực tiểu vẫn nằm khác phía của (Δ) .

• **Lời giải đúng:**

• Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = \frac{-x^2 + 2x + 5 - 2m}{x - 1} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 2x + 5 - 2m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 6 - 2m > 0 \\ g(1) = 2m - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3 \quad (1)$$

• **Bổ đề:** $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ v(x_0) = 0 \end{cases}$ thì $y(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

• **Chứng minh:** $0 = y'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)} \Leftrightarrow \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

• **Áp dụng:** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $g(x) = 0$.

Ta có $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ là điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.

Đặt $u(x) = -x^2 + 2mx - 5$; $v(x) = x - 1$. Do $y'_1 = y'_2 = 0$ nên:

$$y_1 = \frac{u(x_1)}{v(x_1)} = \frac{u'(x_1)}{v'(x_1)} = -2x_1 + 2m \quad ; \quad y_2 = \frac{u(x_2)}{v(x_2)} = \frac{u'(x_2)}{v'(x_2)} = -2x_2 + 2m$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu có phương trình $y = -2x + m$ (d)

$$\text{Xét } (d) \cap (\Delta) \equiv K \Leftrightarrow 2x = -2x + m \Leftrightarrow x_k = \frac{m}{2}$$

Vậy A, B nằm về 2 phía của đường thẳng $(\Delta): y = 2x \Leftrightarrow K$ nằm trong đoạn AB

$$\Leftrightarrow x_k \in (x_1, x_2) \Leftrightarrow g\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4} + m - 5 < 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6} \quad (2)$$

• Từ (1) và (2) suy ra điều kiện của m là: $-2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$

§5. SAI LÂM TRONG CÁC BÀI TOÁN TÌM MAX, MIN CỦA HÀM SỐ

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ trên $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

• *Sai lầm thường gặp:*

Ta có: $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$. Do $g(x) < 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \Rightarrow y' < 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số giảm trên $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \Rightarrow \max f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}; \min f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Do hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ nên không thể dùng tính chất nghịch biến của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

• *Lời giải đúng:*

Ta có: $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}; \quad g(x) < 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

x	$1/2$	1	$3/2$
y'	—		—
y	$-1/2$	$-\infty$	$9/2$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

(Đề thi Đại học năm 2003 ban B)

• *Sai lầm thường gặp:*

Điều kiện để $\sqrt{4 - x^2}$ có nghĩa là $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Khi đó:

$$y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2} \geq x \geq -2 \Rightarrow \min f(x) = -2$$

$$y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2} \leq 2 + \sqrt{4} = 4 \Rightarrow \max f(x) = 4$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\max f(x) = 4 \text{ xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \text{ Vậy dấu bằng không thể xảy ra.}$$

• **Lời giải đúng:**

Điều kiện để $\sqrt{4-x^2}$ có nghĩa là $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Khi đó:

$$y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2} \geq x \geq -2 \Rightarrow \min f(x) = -2. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = -2$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2} \leq \sqrt{2[x^2 + (\sqrt{4-x^2})^2]} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \max f(x) = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bài 3. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm Max, Min của $F(x, y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$F(x, y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \leq \sqrt{(x^2 + y^2)[(1+y) + (1+x)]} = \sqrt{2+x+y}$$

$$\leq \sqrt{2 + \sqrt{2(x^2 + y^2)}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}. \text{ Với } x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ thì } \max F(x, y) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

• **Sai lầm thường gặp khi tìm Min $F(x, y)$:**

Do $x^2 + y^2 = 1$ nên $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1$

$$\Rightarrow F(x, y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \geq -\sqrt{1+y} - \sqrt{1+x} =$$

$$= -(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}) \geq -\sqrt{2[(1+x) + (1+y)]} = -\sqrt{2(2+x+y)} \geq$$

$$\geq -\sqrt{2[2 + \sqrt{2(x^2 + y^2)}]} = -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow \min F(x, y) = -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\min F(x, y) = -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \text{ xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \emptyset.$$

Vậy dấu bằng với giá trị min tìm được không tồn tại.

• **Lời giải đúng:**

Trường hợp 1: $xy \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x \leq 0; y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Để tìm $\text{Min} F(x, y)$ ta xét $x \leq 0; y \leq 0$

Khi đó do $|x| + |y| = \sqrt{1 + 2|x||y|} \geq 1$ nên kết hợp bất đẳng thức Bunhiacôpxki

ta có: $F(x, y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = -(|x|\sqrt{1-|y|} + |y|\sqrt{1-|x|}) \geq$
 $\geq -\sqrt{2 - (|x| + |y|)} \geq -\sqrt{2-1} = -1 \Rightarrow \text{Min } F(x, y) = -1 \quad (1)$

Trường hợp 2: $xy < 0$. Đặt $t = x + y \Rightarrow xy = \frac{t^2 - 1}{2} < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 1$

Khi đó $2 \cdot F^2(x, y) = g(t) = (\sqrt{2} + 1)t^3 + \sqrt{2} \cdot t^2 - (\sqrt{2} + 1)t + 2 - \sqrt{2}$

$g'(t) = 3(\sqrt{2} + 1)t^2 + 2\sqrt{2}t - (\sqrt{2} + 1)$. Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 = -\frac{\sqrt{2} + 1}{3} \\ t = t_2 = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên ta có:

$\max g(t) = g(t_1) = \frac{76 - 12\sqrt{2}}{27}$

t	-1	t_1	$\sqrt{2}$	+2
g'		+	-	+
g		↗	↘	↗
	2	CĐ	CT	2

$\Rightarrow |F(x, y)| \leq \sqrt{\frac{38 - 6\sqrt{2}}{27}} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{38 - 6\sqrt{2}}{27}} \leq F(x, y) \leq \sqrt{\frac{38 - 6\sqrt{2}}{27}}$

$\Rightarrow \min F(x, y) = -\sqrt{\frac{38 - 6\sqrt{2}}{27}} \quad (2).$ Từ (1) và (2) suy ra $\min F(x, y) = -\sqrt{\frac{38 - 6\sqrt{2}}{27}}$

Bình luận: Đây là bài 33 câu III.2. có trong bộ đề thi tuyển sinh của Bộ đại học xuất bản từ năm 1987 – 1994. Bộ đề và các sách đã giải sai bài này trong phần tìm Min của $F(x, y)$ với cùng 1 đáp số là: $\text{Min } F(x, y) = -1$ cho đến khi Nhà xuất bản TP. Hồ Chí Minh giới thiệu lời giải đúng trên trong cuốn sách "*Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức*" của tác giả năm 1993.

CHƯƠNG V: NHỮNG QUAN ĐIỂM KHÁC NHAU TRONG CÁC BÀI TOÁN TIẾP XÚC, TIẾP TUYẾN VÀ TIỆM CẬN

§1. TỔNG QUAN LÝ THUYẾT VỀ SỰ TIẾP XÚC VÀ TIẾP TUYẾN

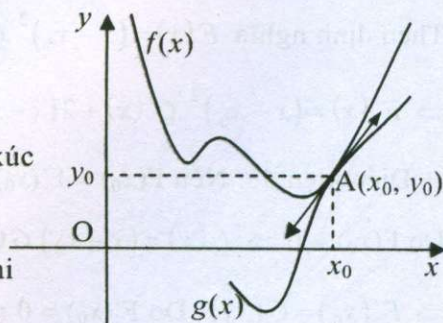
Theo quy định của Bộ GD và ĐT kể từ năm 2000 – 2001 không được dùng phương pháp nghiệm bội, nghiệm kép để giải quyết các bài toán về tiếp tuyến và sự tiếp xúc của hai đồ thị vì nó "thiếu cơ sở lý thuyết". Thật ra phương pháp này đúng và rất tiện ích cho các hàm đa thức phân thức. Chúng tôi sẽ trình bày đầy đủ các bài toán tiếp xúc, tiếp tuyến dưới nhiều quan điểm khác nhau để bạn đọc thấy được "sự phù phàng" khi phải từ bỏ phương pháp nghiệm bội nghiệm kép.

I. ĐỊNH NGHĨA SỰ TIẾP XÚC

Đồ thị hai hàm số $\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \end{cases}$ tiếp xúc

với nhau tại điểm $A(x_0, y_0)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \text{Điểm } A(x_0, y_0) \in (C_1) \cap (C_2) \\ \text{Tiếp tuyến tại } A \text{ của } (C_1) \text{ trùng với} \\ \text{Tiếp tuyến tại } A \text{ của } (C_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$



II. ĐIỀU KIỆN TIẾP XÚC

1. Điều kiện tiếp xúc theo định nghĩa

$$\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \end{cases} \text{ tiếp xúc nhau} \Leftrightarrow \text{Hệ phương trình} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

2. Điều kiện nghiệm bội cho các hàm phân thức hữu tỉ

2.1. Định nghĩa nghiệm bội

Gọi $F(x)$ là một đa thức đại số. Số x_0 được gọi là nghiệm bội k của $F(x)$ khi

$$\text{và chỉ khi } F(x) \text{ chia hết cho } (x - x_0)^k \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) = (x - x_0)^k \cdot Q(x) \\ 2 \leq k \in \mathbb{Z}; Q(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Trong trường hợp $F(x)$ là tam thức bậc hai, nghiệm bội được gọi là nghiệm kép.

2.2. Định lý: Cho 2 phân thức hữu tỉ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, g(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$

Khi đó đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình $P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$ có nghiệm bội $x = x_0$ với $Q(x_0) \neq 0, V(x_0) \neq 0$

Chứng minh

• **Bổ đề:** Đa thức $F(x)$ có nghiệm bội $x = x_0$ khi và chỉ khi $F(x_0) = F'(x_0) = 0$

• **Chứng minh:**

+ Điều kiện cần: Nếu x_0 là nghiệm bội của phương trình $F(x) = 0$

Theo định nghĩa $F(x) = (x - x_0)^2 \cdot Q(x)$ nên:

$$\Rightarrow F'(x) = (x - x_0)^2 \cdot Q'(x) + 2(x - x_0) \cdot Q(x) \Rightarrow F(x_0) = F'(x_0) = 0$$

+ Điều kiện đủ: Nếu $F(x_0) = F'(x_0) = 0$

$$\text{Do } F(x_0) = 0 \Rightarrow F(x) = (x - x_0) \cdot G(x) \Rightarrow F'(x) = (x - x_0)G'(x) + G(x)$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = G(x_0). \text{ Do } F'(x_0) = 0 \Rightarrow G(x_0) = 0 \Rightarrow G(x) = (x - x_0)Q(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = (x - x_0)G(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$$

• **Áp dụng:**

Giả sử đồ thị các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$.

$$\text{Theo định nghĩa 1 ta có: } \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{U(x_0)}{V(x_0)} \quad (1)$$

$$\frac{P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)}{Q^2(x_0)} = \frac{U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)}{V^2(x_0)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow P(x_0)V(x_0) = Q(x_0)U(x_0)$$

$$\text{Từ (2)} \Leftrightarrow [P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)]V^2(x_0) = [U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)]Q^2(x_0)$$

$$\Rightarrow [P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)]V^2(x_0)Q(x_0)U(x_0) =$$

$$= [U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)]Q^2(x_0)P(x_0)V(x_0)$$

$$\Leftrightarrow [P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)]V(x_0)U(x_0) =$$

$$= [U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)]Q(x_0)P(x_0)$$

$$\Leftrightarrow Q(x_0)U(x_0)[P'(x_0)V(x_0) + P(x_0)V'(x_0)] =$$

$$= P(x_0)V(x_0)[U(x_0)Q'(x_0) + U'(x_0)Q(x_0)]$$

$$\Rightarrow P'(x_0)V(x_0) + P(x_0)V'(x_0) = U(x_0)Q'(x_0) + U'(x_0)Q(x_0)$$

$$\Leftrightarrow P'(x_0)V(x_0) + P(x_0)V'(x_0) - [U(x_0)Q'(x_0) + U'(x_0)Q(x_0)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [P(x)V(x)]' \Big|_{x=x_0} - [Q(x)U(x)]' \Big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

III. TIẾP TUYẾN CỦA MỘT ĐƯỜNG CONG PHẪNG

Cho đồ thị (C): $y = f(x)$. Gọi M_0, M là 2

điểm phân biệt và cùng thuộc đồ thị (C).

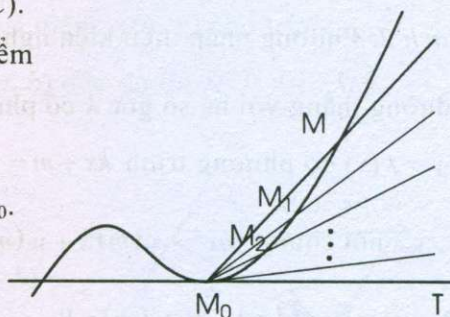
Khi đó nếu cố định điểm M_0 và cho điểm

M chuyển động trên (C) đều gần điểm

M_0 thì vị trí giới hạn của cát tuyến

(M_0M) là tiếp tuyến (M_0T) tại điểm M_0 .

$$\lim_{M \rightarrow M_0} (M_0M) = \text{Tiếp tuyến } (M_0T)$$



IV. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ TIẾP TUYẾN

1. BÀI TOÁN 1: Viết phương trình tiếp tuyến tại 1 điểm thuộc đồ thị

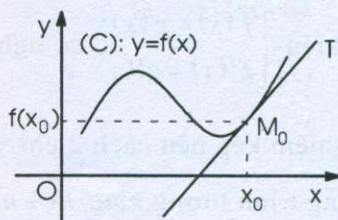
1.1. Bài toán: Cho đồ thị (C): $y = f(x)$ và điểm $M_0(x_0, y_0) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$

1.2. Phương pháp:

• Theo ý nghĩa hình học của đạo hàm thì tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0) \in (C)$: $y = f(x)$ có hệ số góc là $f'(x_0)$

• Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0)$ của (C) là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

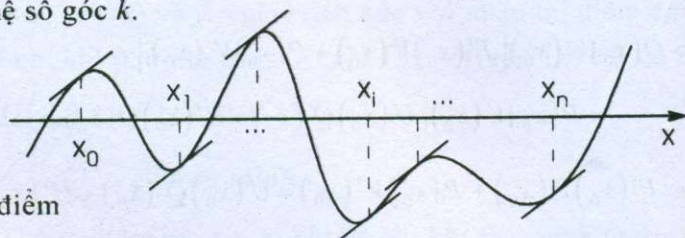


2. BÀI TOÁN 2: Viết phương trình tiếp tuyến theo hệ số góc cho trước

2.1. Bài toán: Cho đồ thị $(C): y = f(x)$ và một số $k \in \mathbb{R}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc k .

2.2. Phương pháp:

a) Cách 1:



Phương pháp tìm tiếp điểm

- Giả sử tiếp tuyến có hệ số góc k tiếp xúc với $(C): y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_i \Rightarrow f'(x_i) = k \Rightarrow x_i$ là nghiệm của $f'(x) = k$

- Giải phương trình $f'(x) = k \Rightarrow$ nghiệm $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$

Phương trình tiếp tuyến tại $x = x_i$ là: $y = k(x - x_i) + f(x_i)$

b) Cách 2: Phương pháp điều kiện nghiệm kép

Xét đường thẳng với hệ số góc k có phương trình $y = kx + m$ (âm m) tiếp xúc $(C): y = f(x) \Leftrightarrow$ phương trình $kx + m = f(x)$ có nghiệm bội (nghiệm kép)

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$ nói chung: $ux^2 + v(m)x + w(m) = 0$ có nghiệm kép.

$\Leftrightarrow \Delta = g(m) = v^2(m) - 4u.w(m) = 0$.

Giải phương trình $g(m) = 0 \Rightarrow$ các giá trị của $m \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến.

c) Chú ý: Vì điều kiện $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc nhau là hệ

điều kiện $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm chứ không phải là điều kiện $f(x) = g(x)$

có nghiệm kép nên cách 2 chỉ sử dụng được cho các dạng hàm số $f(x)$ mà phương trình tương giao $kx + m = f(x)$ có thể biến đổi tương đương với 1 phương trình bậc 2.

2.3. Các dạng biểu diễn của hệ số góc k

- a) Dạng trực tiếp: $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots, \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{3}, \dots$
- b) Tiếp tuyến tạo với chiều dương Ox góc $\alpha \Rightarrow k = \operatorname{tg} \alpha$ với $\alpha = \{15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ\}$
- c) Tiếp tuyến $\parallel$ với đường thẳng $(\Delta): y = ax + b \Rightarrow k = a$
- d) Tiếp tuyến $\perp$ với đường thẳng $(\Delta): y = ax + b \Rightarrow k = \frac{-1}{a}$ với $a \neq 0$
- e) Tiếp tuyến tạo với đường thẳng $(\Delta): y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left| \frac{k-a}{1+ka} \right| = \operatorname{tg} \alpha$ với $\alpha = \{15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ\}$

3. BÀI TOÁN 3: Viết phương trình tiếp tuyến đi qua 1 điểm cho trước

3.1. Bài toán: Cho đồ thị (C): $y = f(x)$ và điểm $A(a, b)$ cho trước.

Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(a, b)$ đến đồ thị (C): $y = f(x)$

3.2. Phương pháp:

a) Phương pháp tìm tiếp điểm

• Cách 1: Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(a, b)$ tiếp xúc (C): $y = f(x)$ tại tiếp điểm có hoành độ x_i suy ra phương trình tiếp tuyến có dạng:

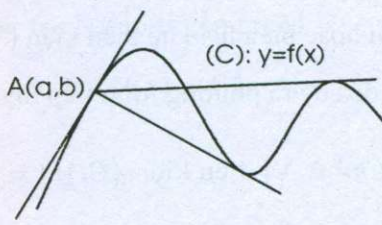
$$(t): y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$$

Do $A(a, b) \in (t)$ nên $b = f'(x_i)(a - x_i) + f(x_i) \Rightarrow x = x_i$ là nghiệm của phương trình $b = f'(x)(a - x) + f(x) \Leftrightarrow f'(x)(x - a) + b - f(x) = 0$ (*)

Giải phương trình (*) $\Rightarrow$ nghiệm $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$

Phương trình tiếp tuyến tại $x = x_i$ là: $y = k(x - x_i) + f(x_i)$

• Cách 2: Đường thẳng đi qua $A(a, b)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x - a) + b$ tiếp xúc với đồ thị (C): $y = f(x)$



$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = k(x-a) + b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm

$$\Rightarrow f(x) = f'(x)(x-a) + b$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(x-a) + b - f(x) = 0 \quad (*)$$

Giải phương trình $(*) \Rightarrow$ nghiệm $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$

Phương trình tiếp tuyến tại $x = x_i$ là: $y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$

b) Phương pháp điều kiện nghiệm kép

• Cách 3: Đường thẳng đi qua $A(a, b)$ với hệ số góc k có phương trình

$y = k(x-a) + b$ tiếp xúc $(C): y = f(x) \Leftrightarrow$ phương trình $k(x-a) + b = f(x)$

có nghiệm bội (nghiệm kép) $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$ nói chung: $u(k)x^2 + v(k)x + w(k) = 0$

có nghiệm kép $\Leftrightarrow u(k) \neq 0$ và $\Delta = g(k) = v^2(k) - 4u(k).w(k) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(k) \neq 0 \\ g(k) = \alpha.k^2 + \beta.k + \gamma = 0 \end{cases} \quad (**) \text{ Hệ sinh ra hệ số góc}$$

Giải hoặc biện luận hệ điều kiện $(**)$ suy ra các giá trị của k hoặc số lượng của k .

Từ đó suy ra phương trình tiếp tuyến hoặc số lượng các tiếp tuyến đi qua $A(a, b)$.

c) Chú ý: Vì điều kiện $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc nhau là hệ

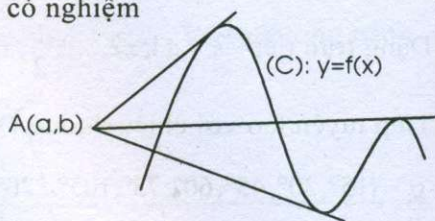
điều kiện $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm chứ không phải là điều kiện $f(x) = g(x)$

có nghiệm kép nên cách 2 chỉ sử dụng được cho các dạng hàm số $f(x)$ mà phương trình tương giao $kx + m = f(x)$ có thể biến đổi tương đương với 1 phương trình bậc 2.

4. BÀI TOÁN 4:

Viết phương trình tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị tại 2 điểm phân biệt.

4..1. Bài toán: Cho $(C): y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$). Viết phương trình tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại 2 điểm phân biệt.



4.2. Phương pháp:

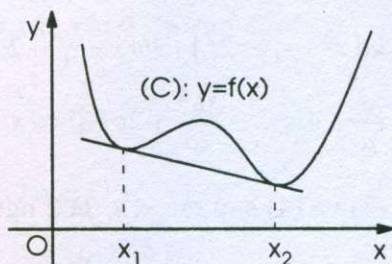
• **Cách 1:** Giả sử đường thẳng

(l): $y = kx + m$ (ảnh k, m) tiếp xúc

(C): $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt có

hoành độ x_1, x_2 . Khi đó $f(x) = kx + m$

có 2 nghiệm kép phân biệt x_1, x_2



$$\Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + (d-k)x + (e-m) = a(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + (d-k)x + (e-m) = a(x^2 - Sx + P)^2 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + (d-k)x + (e-m) = a(x^4 - 2Sx^3 + (S^2 + 2P)x^2 - 2SPx + P^2) \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2aS = b \\ a(S^2 + 2P) = c \\ -2aSP = d - k \\ aP^2 = e - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = S_0 = \frac{-b}{2a} \\ P = x_1x_2 = P_0 = \frac{4ac - b^2}{8a^2} \\ k = 2aS_0P_0 + d \\ m = e - aP_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{S_0 - \sqrt{S_0^2 - 4P_0}}{2} \\ x_2 = \frac{S_0 + \sqrt{S_0^2 - 4P_0}}{2} \\ (l): y = (2aS_0P_0 + d)x + (e - aP_0^2) \end{cases}$$

• **Cách 2:** Phương pháp sử dụng định nghĩa tiếp xúc (Hệ chứa đạo hàm)

Lấy bất kì điểm $M(x_1, f(x_1)) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là:

(D): $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$. Để (D) tiếp xúc với (C) tại điểm $N \neq M$

$$\text{thì hệ } \begin{cases} f(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) & (1) \\ f'(x) = f'(x_1) & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm } x_2 \neq x_1.$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f'(x) + f'(x_1)}{2} = 2a(x^3 + x_1^3) + \frac{3b}{2}(x^2 + x_1^2) + c(x + x_1) + d$$

Thay vào (1) suy ra: (1) $\Leftrightarrow f(x) - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

$$\Leftrightarrow a(x^4 - x_1^4) + b(x^3 - x_1^3) + c(x^2 - x_1^2) + d(x - x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow a(x^2 + x_1^2)(x + x_1) + b(x^2 + x_1x + x_1^2) = 2a(x^3 + x_1^3) + \frac{3b}{2}(x^2 + x_1^2)$$

$$\Leftrightarrow ax^3 + (ax_1 + b)x^2 + (ax_1 + b)x_1x + ax_1^3 + bx_1^2 = 2ax^3 + 2ax_1^3 + \frac{3b}{2}x^2 + \frac{3b}{2}x_1^2$$

$$\Leftrightarrow ax^3 - \left(ax_1 - \frac{b}{2}\right)x^2 - (ax_1 + b)x_1x + ax_1^3 + \frac{b}{2}x_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[a(x + x_1) + \frac{b}{2}\right](x - x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow a(x + x_1) + \frac{b}{2} = 0 \Leftrightarrow x + x_1 = \frac{-b}{2a} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } (2) &\Leftrightarrow f'(x) - f'(x_1) = 4a(x^3 - x_1^3) + 3b(x^2 - x_1^2) + 2c(x - x_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4a(x^2 + x_1x + x_1^2) + 3b(x + x_1) + 2c = 0 \Leftrightarrow 4a(x + x_1)^2 - 4ax_1x + 3b(x + x_1) + 2c = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{b^2}{a} - 4ax_1x - \frac{3b^2}{2a} + 2c = 0 \Leftrightarrow x_1x = \frac{4ac - b^2}{8a^2} \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (3) và (4) suy ra: x, x_1 là 2 nghiệm của PT: $g(t) = t^2 + \frac{b}{2a}t + \frac{4ac - b^2}{8a^2} = 0$

$$\text{Với } \Delta_g = \frac{3b^2 - 8ac}{4a^2} > 0 \text{ thì } g(t) = 0 \Leftrightarrow x, x_1 = \frac{-b}{4a} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3b^2 - 8ac}{4a^2}}$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại 2 điểm phân biệt là:

$$(D): y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \text{ với } x_1 = \frac{-b}{4a} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3b^2 - 8ac}{4a^2}}$$

5. BÀI TOÁN 5: Viết phương trình tiếp tuyến chung tiếp xúc với 2 đồ thị.

5.1. Dạng 1: $(P_1): y = f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$; $(P_2): y = g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$

Viết phương trình tiếp chung của (P_1) và (P_2) .

5.2. Dạng 2: $(P): y = f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$; $(C): y = g(x) = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2}$

Viết phương trình tiếp chung của (P) và (C) .

5.3. Dạng 3: $(P): y = f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$; $(C): y = g(x) = \frac{a_2x^2 + b_2x + c_2}{m_2x + n_2}$

Viết phương trình tiếp chung của (P) và (C) .

5.4. Dạng 4: $(C_1): y = f(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}$; $(C_2): y = g(x) = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2}$

Viết phương trình tiếp chung của (C_1) và (C_2) .

5.5. Dạng 5: $(C_1): y = f(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}$; $(C_2): y = g(x) = \frac{a_2x^2 + b_2x + c_2}{m_2x + n_2}$

Viết phương trình tiếp chung của (C_1) và (C_2) .

5.6. Dạng 6: $(C_1): y = g(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{m_1x + n_1}$; $(C_2): y = g(x) = \frac{a_2x^2 + b_2x + c_2}{m_2x + n_2}$

Viết phương trình tiếp chung của (C_1) và (C_2) .

5.7. Phương pháp:

• Giả sử đường thẳng $(t): y = kx + m$ tiếp xúc với 2 đồ thị, suy ra hai phương trình tương giao của 2 đồ thị với (t) có nghiệm kép $\Rightarrow \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$

6. BÀI TOÁN 6: (Trong hình học giải tích)

Viết phương trình tiếp tuyến chung tiếp xúc với 2 đường conic

$$(E_1): \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1; (E_2): \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1; (H_1): \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = \pm 1; (H_2): \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = \pm 1$$

$$(P_1): y^2 = \pm 2p_1x \vee x^2 = \pm 2p_1y; (P_2): y^2 = \pm 2p_2x \vee x^2 = \pm 2p_2y;$$

6.1. Dạng 1: Viết phương trình tiếp chung của (E_1) và (E_2) .

6.2. Dạng 2: Viết phương trình tiếp chung của (E_1) và (H_1) .

6.3. Dạng 3: Viết phương trình tiếp chung của (E_1) và (P_1) .

6.4. Dạng 4: Viết phương trình tiếp chung của (H_1) và (H_2) .

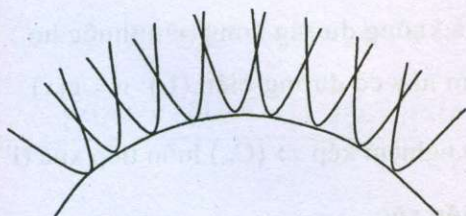
6.5. Dạng 5: Viết phương trình tiếp chung của (H_1) và (P_1) .

6.6. Dạng 6: Viết phương trình tiếp chung của (P_1) và (P_2) .

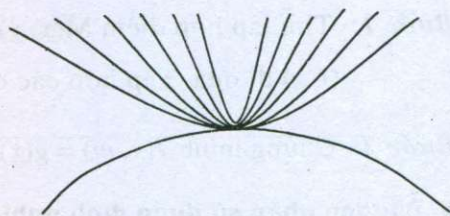
V. HỌ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG CỎ ĐỊNH

1. Bài toán: CM họ đường cong (C_m) luôn tiếp xúc với 1 đường cô định

2. Biểu diễn hình học sự tiếp xúc với 1 đường cô định



Hình 1: Điểm tiếp xúc di động



Hình 2: Điểm tiếp xúc cố định

3. Các phương pháp tìm đường cô định tiếp xúc

3.1. Phương pháp điều kiện nghiệm bội

Giả sử $(C_m): y = f(x, m)$ tiếp xúc với đường cô định $(L): y = g(x)$.

Khi đó $f(x, m) = g(x) \Leftrightarrow P(x) = 0$ có nghiệm bội $\forall m$

$\Leftrightarrow \dots \xleftarrow{\text{Nói chung}} u(m)x^2 + v(m) \cdot x + w(m) = 0$ có nghiệm kép $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(m) \neq 0 \\ \Delta = v^2(m) - 4u(m)w(m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(m) \neq 0 \\ \Delta = g(m) = \sum_{k=0}^n a_k m^k = 0 \quad \forall m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(m) \neq 0 \\ a_k = 0 \quad k = \overline{0, n} \end{cases}$$

3.2. Phương pháp tiếp tuyến cố định

- **Bước 1:** Tìm điểm cố định (nếu có) của (C_m) : $y = f(x, m) \Rightarrow A(x_0, y_0)$ cố định.
- **Bước 2:** Chứng minh $f'(x_0, m) = k = \text{const}$
- **Bước 3:** Kết luận (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng là tiếp tuyến cố định của họ (C_m) tại $A(x_0, y_0)$ với phương trình: $y = k(x - x_0) + y_0$

3.3. Phương pháp tách bộ phận nghiệm kép

- **Bước 1:** Biểu diễn $f(x, m) = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\gamma(x, m)} + g(x)$ với $\begin{cases} 2 \leq k \in \mathbb{Z} \\ g'(m) = 0 \end{cases}$
- **Bước 2:** Xét $f(x, m) = g(x) \Leftrightarrow \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\gamma(x, m)} = 0$ có nghiệm bội $x = -\frac{\beta(m)}{\alpha(m)}$
- **Bước 3:** Kết luận (C_m) luôn tiếp với $(L): y = g(x)$ cố định.

3.4. Phương pháp tìm đường biên của 1 hình lồi

- **Bước 1:** Tìm tập hợp điểm $M(x, y)$ mà không đường cong nào thuộc họ (C_m) đi qua. Tập hợp các điểm này có đường biên $(L): y = g(x)$
- **Bước 2:** Chứng minh $f(x, m) = g(x)$ có nghiệm kép $\Rightarrow (C_m)$ luôn tiếp xúc (L)

3.5. Phương pháp sử dụng định nghĩa tiếp xúc

Giả sử $(C_m): y = f(x, m)$ tiếp xúc với đường cố định $(L): y = g(x)$

Khi đó hệ $\begin{cases} f(x, m) = g(x) \\ f'(x, m) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm $\forall m$

Giải hệ điều kiện có nghiệm $\forall m$ suy ra các tham số giả định trong $g(x)$

3.6. Phương pháp tìm tiếp tuyến cố định đi qua các điểm cực trị

Bước 1: Giải phương trình $f'(x, m) = 0$ để tìm các điểm cực trị $x_1, x_2, \dots, x_k$

Bước 2: Nếu $f(x_i) = p$ (const) thì $y = f(x, m)$ tiếp xúc với đường $y = p$

3.7. Bình luận: Phương pháp **3.1** là phương pháp cơ bản cho các bài toán khi biết trước dạng của đường cố định (L). Đây là phương pháp kinh điển, tức là: "Nói đến sự tiếp xúc là phải nghĩ ngay đến nghiệm bội, nghiệm kép. Tuy nhiên cách giải này thường dài, tính toán phức tạp dễ dẫn tới nhầm lẫn và đặc biệt không thích hợp với các bài toán không cho biết dạng của đường cố định (L).

Phương pháp **3.2** chỉ sử dụng được khi họ (C_m) chứa đựng yếu tố: "Luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định tại 1 điểm cố định." Nếu sử dụng được thì việc tính toán sẽ đơn giản hơn phương pháp **3.1**.

Phương pháp **3.3** cho cách giải ngắn gọn và độc đáo. Điểm khác biệt cơ bản so với 2 phương pháp trên là khả năng giải quyết tốt lớp các bài toán mà không cần biết trước dạng của đường cố định (L). Muốn sử dụng tốt phương pháp này cần nắm được kỹ thuật biến đổi.

$$y = f(x, m) = \frac{[\alpha(m) \cdot x + \beta(m)]^k}{\gamma(x, m)} + g(x) \quad \text{với} \quad \begin{cases} 2 \leq k \in \mathbb{Z} \\ g'_{(m)} = 0 \end{cases} \quad \text{theo 2 cách:}$$

- **Cách 1:** Dự đoán bộ phận nghiệm bội bằng trực quan toán học.
- **Cách 2:** Bước 1: Lấy đạo hàm theo m ta có:

$$y'_{(m)} = \frac{[\alpha(m) \cdot x + \beta(m)]^{k-1} \left\{ k \cdot \gamma(x, m) [\alpha(m) \cdot x + \beta(m)]' - \gamma'(x, m) [\alpha(m) \cdot x + \beta(m)] \right\}}{\gamma^2(x, m)} = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{\beta(m)}{\alpha(m)}.$$

Bước 2: Biến đổi $f(x, m)$ theo bộ phận nghiệm bội $f(x, m) = (x - x_0)^k \cdot h(x)$

Phương pháp **3.4** thường sử dụng khi đường biên của tập hợp các điểm $M(x, y)$ mà không có đồ thị nào của (C_m) đi qua là một đường cong có tính chất của một hình lồi. Phương pháp này có dấu hiệu nhận dạng đặc trưng là tham số m có bậc cao nhất bằng 2 trong biểu thức $f(x, m)$.

Phương pháp **3.5** là cách giải phức tạp nhằm đối phó với quy định của Bộ GD&ĐT là cấm không được sử dụng điều kiện nghiệm bội nghiệm kép.

Phương pháp **3.6** chỉ sử dụng cho lớp các hàm số có tính chất đặc biệt.

§2. CÁC BÀI TẬP SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN NGHIỆM BỘI NGHIỆM KÉP

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 - x + 3m$ tiếp xúc với trục hoành.

Giải

Xét phương trình tương giao: $x^3 - 3mx^2 - x + 3m = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 3m) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-3m) = 0$. Ta có: (C_m) tiếp xúc với trục hoành

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-3m) = 0 \text{ có nghiệm bội} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m=1 \\ 3m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{3} \\ m=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 2. Tìm m để $(C): y = x^3 - 4x^2 + 4x$ tiếp xúc với $(D_m): y = mx - 3m + 3$

Giải

Xét phương trình tương giao: $x^3 - 4x^2 + 4x = mx - 3m + 3$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 - x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow (x-3)g(x) = 0$$

(C) tiếp xúc với $(D_m) \Leftrightarrow$ Phương trình $(x-3) \cdot g(x) = 0$ có nghiệm bội.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(3) = 0 \\ \Delta_g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - m = 0 \\ 4m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Bài 3. Tìm m để $\begin{cases} (C_1): y = mx^3 - (m-1)x^2 + (m+1)x - 1 \\ (C_2): y = -mx^2 + (m+1)x - m \end{cases}$ tiếp xúc nhau.

Giải

Xét phương trình $mx^3 - (m-1)x^2 + (m+1)x - 1 = -mx^2 + (m+1)x - m$

$$\Leftrightarrow m(x^3 + 1) + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)[mx^2 + (1-m)x + m-1] = 0 \Leftrightarrow (x+1)g(x) = 0$$

(C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow$ phương trình $(x+1)g(x)=0$ có nghiệm bội.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1)=0 \\ m \neq 0 \\ \Delta_g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2=0 \\ m \neq 0 \\ (m-1)(-3m-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{2}{3} \\ m=1 \\ m=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến chung của $\begin{cases} (P_1): y=x^2-3x+2 \\ (P_2): y=-x^2-x-3 \end{cases}$

Giải

Giả sử $(D): y=ax+b$ tiếp xúc với (P_1) và (P_2) tại $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$.

Xét phương trình $x^2-3x+2=ax+b \Leftrightarrow x^2-(a+3)x+2-b=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

Ta có (D) tiếp xúc với $(P_1) \Leftrightarrow \Delta_f = 0 \Leftrightarrow (a+3)^2 - 4(2-b) = 0 \quad (1)$

Xét phương trình $-x^2-x-3=ax+b \Leftrightarrow x^2+(a+1)x+3+b=0 \Leftrightarrow g(x)=0$

Ta có (D) tiếp xúc với $(P_2) \Leftrightarrow \Delta_g = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 - 4(3+b) = 0 \quad (2)$

$$\text{Hệ (1) và (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2 = 4(2-b) \\ (a+3)^2 + (a+1)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2 = 4(2-b) \\ a^2 + 4a - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - \frac{(a+3)^2}{4} \\ a = 1 \\ a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; b = -2 \\ a = -5; b = 1 \end{cases}$$

Vậy (P_1) và (P_2) có 2 tiếp tuyến chung là $y = x - 2$ và $y = -5x + 1$.

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 5. Tìm m để $(C_m): y = 2mx^3 + (m-1)x^2 - 9x - 9m + 9$ tiếp xúc với Ox .

Bài 6. Tìm m để $(C_m): y = x^4 + x^3 + (m-1)x^2 - x - m$ tiếp xúc với Ox .

Bài 7. Tìm m để $(C_m): y = x^4 + (m-5)x^2 - mx - 2m + 4$ tiếp xúc với Ox .

Bài 8. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m-1)$ tiếp xúc với Ox .

Bài 9. Tìm m để $(C_m): y = mx^3 + (m+1)x^2 - (4m-3)x + 6m$ tiếp xúc với Ox .

Bài 10. Tìm m để $(C_m): y = \frac{(m-1)(x^2 - 2x) + m + 4}{mx + m}$ tiếp xúc với $y = 1$.

Bài 11. Tìm m để $(C_m): y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$ tiếp xúc với đường $y = m$.

Bài 12. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = -49x + 98$

Bài 13. Tìm m để $(C_m): y = \frac{x^3 + (2m-1)x^2 - (3m-1)x - m^2 - 3m}{x - m}$ tiếp xúc với đường thẳng $y = x + m + 1$

Bài 14. Tìm m để $\begin{cases} (C_1): y = mx^3 + (1-2m)x^2 + 2mx \\ (C_2): y = 3mx^3 + 3(1-2m)x + 4m - 2 \end{cases}$ tiếp xúc với nhau.

Bài 15. Tìm m để tiệm cận xiên của $y = \frac{mx^2 + (2m-1)x + m + 2}{x - 1}$ tiếp xúc với Parabol $(P): y = x^2 - 9$

Bài 16. CMR có đúng 2 tiếp tuyến chung của $\begin{cases} (P): y = x^2 - 2x + 6 \\ (C): y = \frac{x^2 - 1}{x} \end{cases}$

§3. CÁC BÀI TẬP TIẾP XÚC SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN ĐỊNH NGHĨA

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua A(1; 1) đến (C): $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$

Giải

Phương trình tiếp tuyến đi qua A(1; 1) với hệ số góc k (D): $y = k(x - 1) + 1$

$$(D) \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} = k(x - 1) + 1 \\ \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} \right)' = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 + \frac{1}{x - 2} - k(x - 2) = k + 1 \\ 1 - \frac{1}{(x - 2)^2} = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - k + \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{k + 1}{x - 2} \\ \frac{1}{(x - 2)^2} = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 - k) = \frac{k + 1}{x - 2} \\ \frac{1}{(x - 2)^2} = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{2(1 - k)}{k + 1} \right]^2 = 1 - k \\ \frac{1}{(x - 2)^2} = 1 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(1 - k) = (k + 1)^2 \\ \frac{1}{(x - 2)^2} = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 6k - 3 = 0 \\ \frac{1}{(x - 2)^2} = 1 - k \end{cases} \Rightarrow k = -3 \pm 2\sqrt{3}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến qua A đến (C) là $y = (-3 \pm 2\sqrt{3})(x - 1) + 1$

Bài 2. Tìm m để $(C_m): y = f(x) = 2x^3 - 3(m + 3)x^2 + 18mx - 8$ tiếp xúc với Ox.

Giải

$$(C_m) \text{ tiếp xúc với Ox} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3(m + 3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \\ 6x^2 - 6(m + 3)x + 18m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3(m + 3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \\ 6(x - 3)(x - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3(m + 3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \\ x = 3 \vee x = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; 27m - 35 = 0 \\ x = m; -m^3 + 9m^2 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{35}{27} \vee m = 1 \vee m = 4 \pm 2\sqrt{6}$$

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $O(0; 0)$ đến $(C): y = \frac{1 + \ln x}{x}$

Giải

Phương trình tiếp tuyến đi qua $O(0; 0)$ với hệ số góc k $(D): y = kx$

$$\begin{aligned} (D) \text{ tiếp xúc với } (C) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \ln x}{x} = kx \\ \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right)' = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \ln x}{x^2} = k \\ \frac{-\ln x}{x^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-\ln x}{x^2} \\ \frac{-\ln x}{x^2} = \frac{1 + \ln x}{x^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-\ln x}{x^2} \\ \ln x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-\ln x}{x^2} \\ x = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \Rightarrow k = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

Vậy tiếp tuyến đi qua O đến (C) là $y = \frac{e}{2} \cdot x$

Bài 4. Tìm m để $(D): y = m$ tiếp xúc với $(C): y = \frac{x}{\ln x}$

Giải

$$\begin{aligned} (D) \text{ tiếp xúc với } (C) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\ln x} = m \\ \left(\frac{x}{\ln x} \right)' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x}{\ln x} \\ \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x}{\ln x} \\ \ln x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x}{\ln x} \\ x = e \end{cases} \Rightarrow m = e \end{aligned}$$

Bài 5. Tìm m để $(C_1): y = f(x) = (x+1)e^x$ tiếp xúc với $(C_1): y = g(x) = (x^2 + m)e^{x^2}$

Giải

$$\begin{aligned} (C_1) \text{ tiếp xúc với } (C_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)e^x = (x^2 + m)e^{x^2} \\ (x+2)e^x = (x^2 + 2x + m)e^{x^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = x^2 + m \\ x+2 = x^2 + 2x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + x + 1 \\ m = -x^2 - x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + x + 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Bài 6. Tìm m để $\begin{cases} (C): y = \frac{1}{2} \cos^2 x - \cos x + 1 \\ (D): y = x \sin x + m \end{cases}$ tiếp xúc với nhau.

Giải

$$(C) \text{ và } (D) \text{ tiếp xúc nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \cos^2 x - \cos x + 1 = x \sin x + m \\ (\cos^2 x - \cos x + 1)' = (x \sin x + m)' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \cos^2 x - \cos x + 1 = x \sin x + m \\ \sin x - \sin x \cos x = \sin x + x \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - \cos x + 1 = x \sin x + m \\ \cos x (x + \sin x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - \cos x + 1 = x \sin x + m \\ \cos x = 0 \\ x + \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - \cos x + 1 = x \sin x + m \\ \cos x = 0 \\ \cos^2 x - \cos x + 1 = x \sin x + m \\ x + \sin x = 0 \end{cases} \begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix}$$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x \sin x + m \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ m = 1 - \frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \\ m = 1 + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Phương trình $x + \sin x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$

$\Rightarrow$ Hệ (II) có nghiệm $\Leftrightarrow m = 1$.

• Kết luận: $m \in \left\{ 1; 1 - \frac{\pi}{2} - 2k\pi; 1 + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \right\}$

Bài 7. Viết phương trình tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị

$(C): y = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \frac{5}{4}$ tại 2 điểm phân biệt.

Giải

Cách 1: Phương pháp điều kiện nghiệm kép

Đường thẳng $(D): y = ax + b$ tiếp xúc với $(C): y = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \frac{5}{4}$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \frac{5}{4} = ax + b$ có 2 nghiệm kép x_1, x_2

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 2x^2 - ax - b + \frac{5}{4} = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 2x^2 - ax - b + \frac{5}{4} = (x^2 - Sx + P)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{với} \quad \begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 2x^2 - ax - b + \frac{5}{4} = x^4 - 2Sx^3 + (S^2 + 2P)x^2 - 2SPx + P^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2S = 2 \\ S^2 + 2P = -2 \\ 2SP = a \\ P^2 = \frac{5}{4} - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 1 \\ P = x_1 x_2 = -\frac{3}{2} \\ a = -3 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \\ a = -3 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow (D): y = -3x - 1$$

• Cách 2: Phương pháp điều kiện định nghĩa tiếp xúc

Lấy bất kỳ điểm $A(x_1, y_1) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại A có phương trình là $(D): y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$. (D) tiếp xúc (C) tại $B \neq A$

$$\Leftrightarrow \text{Hệ phương trình} \begin{cases} f(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \\ f'(x) = f'(x_1) = k \end{cases} \quad \text{có nghiệm } x_2 \neq x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_2) = f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) & (1) \\ f'(x_2) = f'(x_1) = k & (2) \end{cases}$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow (x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) - 2(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) - 2(x_2 + x_1) = k \quad (3)$$

$$\bullet (2) \Leftrightarrow 4x_2^3 - 6x_2^2 - 4x_2 = 4x_1^3 - 6x_1^2 - 4x_1 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow 2(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) - 3(x_2 + x_1) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x_2x_1 = 2(x_2 + x_1)^2 - 3(x_2 + x_1) - 2$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow k = 4x_2^3 - 6x_2^2 - 4x_2 = 4x_1^3 - 6x_1^2 - 4x_1 =$$

$$= \frac{(4x_2^3 + 4x_1^3) - (6x_2^2 + 6x_1^2) - (4x_2 + 4x_1)}{2} = 2(x_2^3 + x_1^3) - 3(x_2^2 + x_1^2) - 2(x_2 + x_1) \quad (5)$$

Thay (5) vào (3) $\Rightarrow (x_2 - x_1)^2 (x_2 + x_1) - (x_2 - x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 + x_1 = 1$ (6)

Thay (6) vào (4) $\Rightarrow x_2 x_1 = -\frac{3}{2}$. Vậy x_2, x_1 là nghiệm của $X^2 - X - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (D): $y = -3x - 1$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 8. Tìm m để $\begin{cases} (C_1): y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 2m^2 + m \\ (C_2): y = 2x^3 - 10x^2 + 10x + 1 \end{cases}$ tiếp xúc nhau.

Bài 9. Tìm m để $\begin{cases} (C): y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \\ (P): y = x^2 + m \end{cases}$ tiếp xúc nhau.

Bài 10. Tìm m để $\begin{cases} (C_1): y = 3^x (3^x - m + 2) + m^2 - 3m \\ (C_2): y = 3^x + 1 \end{cases}$ tiếp xúc với nhau.

Bài 11. Tìm m để $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ tiếp xúc với $y = 2x - \sin x + m$

Bài 12. Viết phương trình tiếp tuyến chung của $\begin{cases} (C_1): y = \frac{1}{x} + \ln x \\ (C_2): y = \frac{x^2 - 2x + 3}{2} \end{cases}$

Bài 13. Viết phương trình tiếp tuyến chung của $\begin{cases} (C): y = x^3 + 3x - 10 \\ (P): y = x^2 - 5x + 6 \end{cases}$

Bài 14. CMR $\forall m \neq 1$ họ $(C_m): y = \frac{2x^2 + (1-m)x + m}{x-m}$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Bài 15. Cho $(C): y = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt.

§4. CÁC BÀI TẬP VỀ HỌ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

Bài 1. CMR họ $(C_m): y = \frac{2x^2 + (1-m)x + m+1}{x-m}$ ($m \neq -1$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Giải

Cách 1: Phương pháp điều kiện nghiệm kép

Giả sử (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định $(D): y = ax + b$

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình } \frac{2x^2 + (1-m)x + m+1}{x-m} = ax + b \text{ có nghiệm kép } \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (1-m)x + m+1 = (ax+b)(x-m) \text{ có nghiệm kép } \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (a-2)x^2 - [(a-1)m+1-b]x - [(b+1)m+1] = 0 \text{ có nghiệm kép } \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ \Delta = (a-1)^2 m^2 - 2[(a-1)(b-1) - 2(a-2)(b+1)]m + (b-1)^2 + 4(a-2) = 0 \end{cases} \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ (a-1)^2 = 0 \\ (a-1)(b-1) - 2(a-2)(b+1) = 0 \\ (b-1)^2 + 4(a-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ b = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow (D): y = x - 1$$

Cách 2: Phương pháp tiếp tuyến cố định

Giả sử $A(x_0, y_0)$ là điểm cố định của (C_m) , khi đó:

$$y_0 = \frac{2x_0^2 + (1-m)x_0 + m+1}{x_0-m} \quad \forall m \neq -1 \Leftrightarrow (y_0 - x_0 + 1)m + 2x_0^2 + x_0 + 1 - x_0 y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^2 + x_0 + 1 - x_0 y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 - 1 \\ x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow A(-1, -2)$$

Ta có: $y'(x) = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x - m)^2} \Rightarrow y'(-1) = \frac{(m+1)^2}{(-1-m)^2} = 1$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại $A(-1, -2)$ là $(D): y = 1 \cdot (x + 1) - 2 = x - 1$

Vậy họ (C_m) luôn tiếp xúc với $(D): y = x - 1$ tại $A(-1, -2)$

Cách 3: Phương pháp tách bộ phận nghiệm kép

Ta có: $\frac{dy}{dm} = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x - m)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x - m)^2} \Rightarrow f(x, m) = \frac{(x+1)^2}{x - m} + x - 1$

Xét hệ phương trình tương giao: $\begin{cases} (C): y = \frac{(x+1)^2}{x - m} + x - 1 \\ (D): y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{(x+1)^2}{x - m} = 0 \end{cases}$

Do hệ tương giao có nghiệm kép $x = -1$ nên $(D): y = x - 1$ tiếp xúc với (C)

Cách 4: Phương pháp sử dụng định nghĩa tiếp xúc

(C_m) tiếp xúc với $(D): y = ax + b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 + (1-m)x + m + 1}{x - m} = ax + b \\ \left(\frac{2x^2 + (1-m)x + m + 1}{x - m} \right)' = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + m + 1 + \frac{(m+1)^2}{x - m} = ax + b \\ 2 - \frac{(m+1)^2}{(x - m)^2} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(x - m) = \frac{(m+1)^2}{x - m} + (3-a)m + 1 - b \\ \frac{(m+1)^2}{(x - m)^2} = 2 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2 = \frac{(m+1)^2}{(x-m)^2} + \frac{(3-a)m+1-b}{x-m} \\ \frac{(m+1)^2}{(x-m)^2} = 2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-2) = \frac{(3-a)m+1-b}{x-m} \\ \frac{(m+1)^2}{(x-m)^2} = 2-a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(a-2)(m+1)^2 + [(3-a)m+1-b]^2 = 0 \quad \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 \cdot m^2 + 2[4(a-2) + (3-a)(1-b)] \cdot m + (1-b)^2 + 4(a-2) = 0 \quad \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 = 0 \\ 4(a-2) + (3-a)(1-b) = 0 \\ (1-b)^2 + 4(a-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow (D): y = x-1$$

Bài 2. CMR họ $(C_m): y = \frac{(m+1)x+m}{x+m}$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định.

Giải

Ta có: $\frac{dy}{dm} = \frac{(x+1)(x+m) - [(m+1)x+m]}{(x+m)^2} = \frac{x^2}{(x+m)^2}$

Biến đổi: $f(x, m) = \frac{(m+1)x+m}{x+m} = x+1 - \frac{x^2}{x+m}$

Xét phương trình tương giao $\begin{cases} y = \frac{(m+1)x+m}{x+m} \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x+1 - \frac{x^2}{x+m} = x+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ \frac{x^2}{x+m} = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm kép } x = 0 \quad \forall m \neq 0$$

$\Rightarrow$ Họ (C_m) luôn tiếp xúc với $(D): y = x+1$ tại $A(0; 1)$

Bài 3. CMR họ (C_m) : $y = \frac{(m-2)x - m^2 + 2m - 4}{x - m}$ luôn tiếp xúc với 2 đường thẳng cố định.

Giải

Ta có: $\frac{dy}{dm} = \frac{(x-2m-2)(x-m) + (m-2)x - m^2 + 2m - 4}{x-m} = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 4}{x-m}$

$$\frac{dy}{dm} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 4}{x-m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2 \\ x = m + 2 \end{cases}$$

Biểu diễn: $f(x, m) = x + 2 - \frac{[x - (m-2)]^2}{x-m}$; $f(x, m) = x - 6 - \frac{[x - (m+2)]^2}{x-m}$

$\Rightarrow$ Phương trình tương giao: $f(x, m) = x + 2$ và $f(x, m) = x - 6$ có các nghiệm kép tương ứng $x = m - 2$ và $x = m + 2$.

$\Rightarrow$ Họ (C_m) luôn tiếp xúc với 2 đường thẳng cố định $y = x + 2$ và $y = x - 6$

Bài 4. CMR $\forall m \neq -1$, tiệm cận xiên của (C_m) : $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - m^3 + m^2 + 2}{x-m}$

luôn tiếp xúc với 1 Parabol cố định.

Giải

$$y = (m+1)x + m^2 - m + \frac{2}{x-m}. \text{ Do } \lim_{x \rightarrow \infty} \{y - [(m+1)x + m^2 - m]\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-m} = 0$$

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên: (D_m) : $y = (m+1)x + m^2 - m$

Cách 1: Giả sử họ (D_m) luôn tiếp xúc với parabol cố định (P) : $y = ax^2 + bx + c$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(m+1)x + m^2 - m = ax^2 + bx + c$ có nghiệm kép $\forall m \neq -1$

$\Leftrightarrow ax^2 + (b-1-m)x + c + m - m^2 = 0$ có nghiệm kép $\forall m \neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = (4a+1)m^2 - 2(b-1+2a)m + (b-1)^2 - 4ac = 0 \end{cases} \quad \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 4a+1=0 \\ b-1+2a=0 \\ (b-1)^2 - 4ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=\frac{3}{2} \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Cách 2: Xét $(D_m): y=(m+1)x+m^2-m$. Ta có: $\frac{dy}{dm}=x+2m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1-x}{2}$

Thay $m=\frac{1-x}{2}$ vào $(D_m): y=(m+1)x+m^2-m \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

$$(D_m): y=g(x, m)=(m+1)x+m^2-m=\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{x+2m-1}{2}\right)^2$$

Do phương trình tương giao $g(x, m)=\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x+2m-1}{2}\right)^2=0$

có nghiệm kép $x=1-2m$ nên (D_m) luôn tiếp xúc với $(P): y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

Bài 5. CMR họ $(C_m): y=x^5-4x^4+3x^3-5x^2+mx+\frac{3-m^2}{4}$ luôn tiếp xúc với 1 đường cong cố định.

Giải

Ta có: $\frac{dy}{dm}=x-\frac{m}{2}=0 \Leftrightarrow m=2x$

Thay $m=2x$ vào (C_m) được $y=x^5-4x^4+3x^3-4x^2+\frac{3}{4}$

Xét phương trình $x^5-4x^4+3x^3-5x^2+mx+\frac{3-m^2}{4}=x^5-4x^4+3x^3-4x^2+\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2-mx+\frac{m^2}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{m}{2}\right)^2=0 \text{ có nghiệm kép } x=\frac{m}{2}$$

$\Rightarrow$ Họ (C_m) luôn tiếp xúc với đường cong $y=x^5-4x^4+3x^3-4x^2+\frac{3}{4}$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 6. Chứng minh rằng: $(C_m): y = \frac{-m(x+1) + x + 2}{m(x+1) - 1}$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Bài 7. Chứng minh rằng: $(C_m): y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m}$ luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Bài 8. CMR tiệm cận xiên của $(C_m): y = \frac{(m+1)x^2 - m^2}{x - m}$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

Bài 9. CMR: TCX của $(C_m): y = \frac{(4m+5)x^2 - (2m^2 - m)x - 2m^3 - 6m^2 + 1}{x - m}$ luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

Bài 10. CMR tiệm cận xiên của họ $(C_m): y = \frac{x^2 \cos \alpha + x + \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{x + \cos \alpha}$ luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

Bài 11. Chứng minh rằng: $(D_\alpha): x \cos \alpha + y \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 1 = 0$ luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

Bài 12. Chứng minh rằng: $(C_m): y = \frac{x^3 - (2m+1)x^2 + m(m+2)x + 4 - m^2}{x - 1}$ luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

Bài 13. Chứng minh rằng: $(C_m): y = x^7 - 5x^6 + 7x^4 - 3x^2 + 2mx + \frac{9 - m^2}{6}$ luôn tiếp xúc với một đường cong cố định

Bài 14. Chứng minh rằng: $(D_m): y = (2m+1)x + m^2 - 3m$ luôn tiếp xúc với một parabol cố định

Bài 15. Chứng minh rằng: $(C_m): y = \frac{(2m+1)x - (2m^2 + 4m + 1)}{x - 2m}$ luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định

Bài 16. Chứng minh rằng: $(C_m): y = \frac{(5m-1)x - (9m^2 - 5m + 1)}{x - m}$ luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định

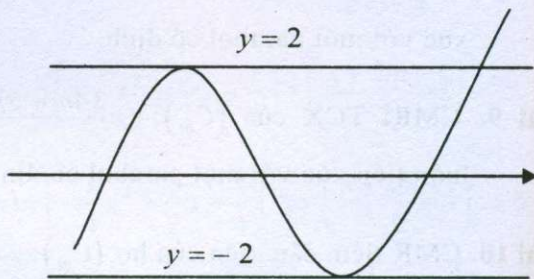
§5. TIẾP TUYẾN CÓ ĐỊNH ĐI QUA CỰC TRỊ HÀM SỐ

Bài 1. CMR $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 3m$ luôn tiếp xúc với 2 đường thẳng cố định.

Giải

$$\text{Ta có: } y' = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - 1; & f(x_1) = 2 \\ x_2 = m + 1; & f(x_2) = -2 \end{cases}$$

Từ đồ thị suy ra họ (C_m) luôn tiếp xúc với $y = 2$ và $y = -2$.



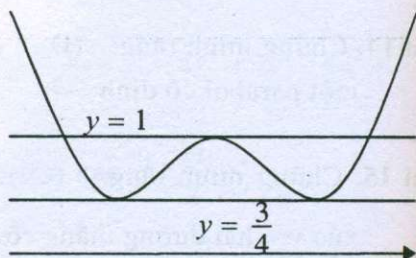
Bài 2. CMR $(C_m): y = x^4 - 4mx^3 + (6m^2 - 1)x^2 - 2mx(2m^2 - 1) + m^4 - m^2 + 1$ luôn tiếp xúc với 2 đường thẳng cố định

Giải

$$\text{Ta có: } y' = 4(x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3) - 2(x - m) =$$

$$= 4(x - m)^3 - 2(x - m) = 4(x - m) \left[(x - m)^2 - \frac{1}{2} \right]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m; & f(m) = 1 \\ x = m - \frac{1}{\sqrt{2}}; & f\left(m - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} \\ x = m + \frac{1}{\sqrt{2}}; & f\left(m + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} \end{cases}$$



Từ đồ thị suy ra họ (C_m) luôn tiếp xúc với 2 đường thẳng $y = 1$ và $y = \frac{3}{4}$

§7. TIỆM CẬN CỦA ĐƯỜNG CONG

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

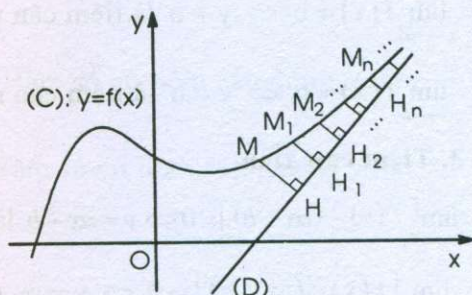
1. Điểm chạy ra vô tận:

$$\text{Điểm } M(x, y) \text{ chạy ra vô tận} \Leftrightarrow M(x, y) \rightarrow \infty \Leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{cases}$$

2. Định nghĩa tiệm cận

Cho đường cong (C): $y = f(x)$ và đường thẳng (D). Lấy M bất kì $\in (C)$. Gọi H là hình của M lên đường thẳng (D). Khi đó ta nói đường thẳng (D) là tiệm cận của đường cong (C)

$$\Leftrightarrow \lim_{M(x, y) \rightarrow \infty} |MH| = 0$$



3. Bình luận: Điều kiện cần để đường cong (C): $y = f(x)$ có tiệm cận

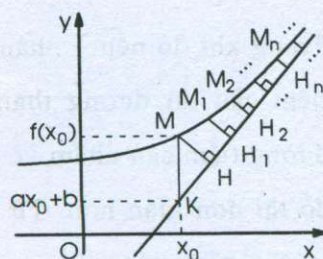
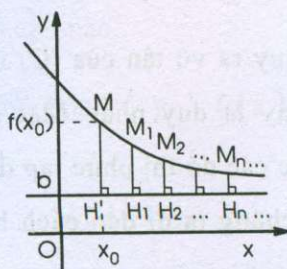
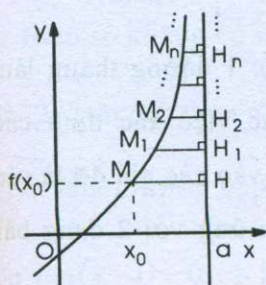
$\Leftrightarrow$ Miền xác định hoặc Miền giá trị của hàm số $y = f(x)$ phải chứa ∞

$\Leftrightarrow$ Đường cong (C): $y = f(x)$ phải có nhánh chạy ra vô tận.

Tuy nhiên có những hàm số có nhánh chạy ra vô tận nhưng vẫn không có tiệm cận.

II. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIỆM CẬN

Cho đường cong (C): $y = f(x)$. Xét các dấu hiệu với các tiệm cận tương ứng



1. Tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = a$ là tiệm cận đứng của $(C): y = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = a$ là tiệm cận đứng bên phải của $(C): y = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = a$ là tiệm cận đứng bên trái của $(C): y = f(x)$

2. Tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b$ là tiệm cận ngang của $(C): y = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b$ là tiệm cận ngang bên phải của $(C): y = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b$ là tiệm cận ngang bên trái của $(C): y = f(x)$

3. Tiệm cận xiên

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow y = ax + b$ là tiệm cận xiên của $(C): y = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow y = ax + b$ là tiệm cận xiên bên phải $(C): y = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow y = ax + b$ là tiệm cận xiên bên trái $(C): y = f(x)$

4. Tiệm cận cong

Trong nhiều sách đã xuất bản đều thừa nhận "Tiệm cận cong" với ví dụ:

$$(C): y = f(x) = \frac{x^3}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Do $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x^2 + x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow (C)$ có tiệm cận cong $y = x^2 + x + 1$

• **Bình luận:** Nếu thừa nhận khái niệm "Tiệm cận cong" thì $(C): y = f(x)$

nêu trên có vô số tiệm cận cong. Ví dụ: $y = x^2 + x + 1 + \frac{m}{x-1} \quad \forall m \neq 1$.

Trong khi đó nếu 1 nhánh chạy ra vô tận của (C) nhận 1 đường thẳng làm tiệm cận thì đường thẳng này là duy nhất. Mặt khác việc xác định các đường tiệm cận nhằm vẽ được các đồ thị phức tạp dựa vào các giả đở là các đồ thị đơn giản hơn. Từ đó chúng ta đi đến cách hiểu ứng với 2 dạng bài toán về tiệm cận.

1. **Dạng toán 1:** "Tìm tiệm cận" của hàm số thì phải hiểu tiệm cận là đường thẳng với 1 trong 3 dạng: tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên.

2. **Dạng toán 2:** "Khảo sát và vẽ đồ thị" của các hàm phân thức bậc cao thì có thể sử dụng tiệm cận cong là các đa thức bậc cao để vẽ đồ thị.

III. CÁC SAI LÂM THƯỜNG GẶP TRONG CÁC BÀI TOÁN TIỆM CẬN

1. Các bài tập mẫu minh họa

Bài 1. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x-m}$

• Sai lầm thường gặp:

Do $\lim_{x \rightarrow m} (x-m) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow m} \frac{x}{x-m} = \infty \Rightarrow$ Hàm số có tiệm cận đứng $x = m$

Do $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-m} = \lim_{x \rightarrow m} \frac{1}{1 - \frac{m}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1 \Rightarrow$ Hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$

• Nguyên nhân sai lầm:

Cách giải trên đã không xét đến trường hợp Hypecbol suy biến thành đường thẳng. Khi đó, hàm số sẽ không có tiệm cận nào.

• Lời giải đúng:

- Với $m \neq 0$ thì:

Do $\lim_{x \rightarrow m} (x-m) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow m} \frac{x}{x-m} = \infty \Rightarrow$ Hàm số có tiệm cận đứng $x = m$

Do $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-m} = \lim_{x \rightarrow m} \frac{1}{1 - \frac{m}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1 \Rightarrow$ Hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$

- Với $m = 0$ thì: $y = f(x) = \frac{x}{x} = 1$ với $x \neq 0$. Đồ thị hàm số là 2 nửa đường thẳng

$\Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận nào.

Bài 2. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 2mx + 1}{x-1}$

• Sai lầm thường gặp:

Do $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2mx + 1}{x-1} = \infty \Rightarrow$ Hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + 2m + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2mx + 1}{x - 1} - (x + 2m + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2m + 2}{x - 1} = 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 2m + 1$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã không xét đến trường hợp Hypecbol suy biến thành đường thẳng. Khi đó, hàm số sẽ không có tiệm cận nào.

• **Lời giải đúng:**

– Với $m \neq -1$ thì:

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2mx + 1}{x - 1} = \infty \Rightarrow \text{Hàm số có tiệm cận đứng } x = 1$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + 2m + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2mx + 1}{x - 1} - (x + 2m + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2m + 2}{x - 1} = 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 2m + 1$

$$\text{– Với } m = -1 \text{ thì } y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = x - 1 \text{ với } x \neq 1$$

Đồ thị hàm số là 2 nửa đường thẳng $\Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận nào.

Bài 3. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = f(x) = \frac{x^3}{x + 1}$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x + 1} = \infty \Rightarrow \text{Hàm số có tiệm cận đứng } x = -1$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x^2 - x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x + 1} - (x^2 - x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x + 1} = 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số có tiệm cận $y = x^2 - x + 1$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Nếu thừa nhận khái niệm "Tiệm cận cong" thì (C): $y = f(x) = \frac{x^3}{x + 1}$ nêu trên

có vô số tiệm cận cong. Ví dụ: $y = x^2 - x + 1 + \frac{m}{x + 1} \quad \forall m \neq -1$.

Trong khi đó nếu 1 nhánh chạy ra vô tận của (C) nhận 1 đường thẳng làm tiệm cận thì đường thẳng này là duy nhất.

Bài 4. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ $a > 0$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{aligned} \text{Do } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c - a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{b^2 - 4ac}{4a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|} = 0 \Rightarrow \text{Hàm số có tiệm cận là } y = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số có tiệm cận xiên bên phải $y = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$ khi $x \rightarrow +\infty$

và có tiệm cận xiên bên trái $y = -\sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$ khi $x \rightarrow -\infty$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã không xét trường hợp hàm số suy biến thành đường thẳng. Khi đó, hàm số sẽ không có tiệm cận nào.

• **Lời giải đúng:**

– Với $b^2 - 4ac \neq 0$ thì:

$$\begin{aligned} \text{Do } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c - a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{b^2 - 4ac}{4a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|} = 0 \Rightarrow \text{Hàm số có tiệm cận là } y = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số có tiệm cận xiên bên phải $y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ khi $x \rightarrow +\infty$

và có tiệm cận xiên bên trái $y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ khi $x \rightarrow -\infty$

- Với $b^2 - 4ac = 0$ thì $y = f(x) = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$.

Đồ thị hàm số là 2 nửa đường thẳng nên hàm số không có tiệm cận nào.

2. Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải

Bài 5. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$

Bài 6. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$

Bài 7. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = \frac{x-2}{x^2+2x+m}$

Bài 8. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = \frac{2x^2-x+m}{x+3}$

Bài 9. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = \lg(x^2 - x - 6)$

Bài 10. Tìm các tiệm cận của hàm số $y = f(x) = mx + n + p\sqrt{ax^2 + bx + c}$ $a > 0$

Bài 11. Tìm tiệm cận của hàm số: $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + mx + 1}$

Bài 12. Tìm các tiệm cận của $y = \frac{mx^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}$

Bài 13. Tìm m để hàm số chỉ có đúng 1 tiệm cận đứng: $y = \frac{x-3}{x^2 + mx + 2m}$

Bài 14. Tìm m, n để $y = \frac{x-1}{x^2 + mx + n}$ có 2 TCD $\begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$ sao cho: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$

D. CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ TIỆM CẬN

1. Các bài tập mẫu minh họa

Bài 1. Tìm m để (C): $y = f(x) = \frac{-x^2 - x + 2a - 1}{x - a}$ có tiệm cận đi qua $A(1, 2)$

Giải

$$f(x) = \frac{-x^2 - x + 2a - 1}{x - a} = -x - a - 1 - \frac{a^2 - a + 1}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(-x - a - 1 - \frac{a^2 - a + 1}{x - a} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (-x - a - 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{a^2 - a + 1}{x - a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{TCĐ: } x = a \\ \text{TCX: } y = -x - a - 1 \end{cases}$$

$$\text{Tiệm cận của (C) đi qua } A(1, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2 = -1 - a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

Bài 2. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của $y = f(x) = \frac{(m+1)x^2 + m^2}{x + m}$ ($m \neq 0$)

luôn tiếp xúc với 1 Parabol cố định

Giải

$$\text{Biến đổi: } y = f(x) = \frac{(m+1)x^2 + m^2}{x + m} = (m+1)x - m(m+1) + \frac{m^3 + 2m^2}{x + m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - [(m+1)x - m(m+1)]\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m^3 + 2m^2}{x + m} = 0$$

$$\Rightarrow \text{TCX: } (D_m): y = (m+1)x - m(m+1)$$

Giả sử (D_m) luôn tiếp xúc với $(P): y = ax^2 + bx + c$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $ax^2 + bx + c = (m+1)x - m(m+1)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow ax^2 - (m+1-b)x + m^2 + m + c = 0 \text{ có nghiệm kép}$$

$$\Leftrightarrow a \neq 0 \text{ và } \Delta = (m+1-b)^2 - 4a(m^2 + m + c) = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow a \neq 0 \text{ và } \Delta = g(m) = (1-b-4a)m^2 + 2(1-b-2a)m + (1-b)^2 - 4ac = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a=0 \\ 1-b-2a=0 \\ (1-b)^2-4ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}; b=\frac{1}{2}; c=\frac{1}{4} \Rightarrow (P): y=\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}$$

Bài 3. Tìm m để tiệm cận xiên của $(C_m): y = \frac{x^2 + (2m+1)x - 4}{x+2}$ $m \neq -\frac{1}{2}$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8

Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 + (2m+1)x - 4}{x+2} = x + 2m - 1 - \frac{4m+2}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + 2m - 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{4m+2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \text{TCX} : (D_m): y = x + 2m - 1$$

Ta có: $(D_m) \cap Ox \equiv A(1-2m, 0)$, $(D_m) \cap Oy \equiv B(0, 2m-1)$

$$\text{Khi đó: } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot (2m-1)^2 = 8 \Leftrightarrow |2m-1| = 4 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \vee m = -\frac{3}{2}$$

Bài 4. Cho M bất kì $\in (C): y = f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x-2}$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận của (C) luôn không đổi.

Giải

Biến đổi: $y = f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = x + 1 + \frac{1}{x-2}$. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(x + 1 + \frac{1}{x-2} \right) = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{TCĐ: } x=2 \\ \text{TCX: } y=x+1 \end{cases}$$

Gọi $M(x_M, y_M) \in (C)$ với $x_M = m, y_M = m + 1 + \frac{1}{m-2}$

$$\begin{cases} \text{Khoảng cách từ M đến TCĐ là } d_1 = |m-2| \\ \text{Khoảng cách từ M đến TCX là } d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}|m-2|} \end{cases} \Rightarrow d_1 \cdot d_2 = |m-2| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}|m-2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\text{dpcm})$$

Bài 5. Tìm α để khoảng cách từ tiệm cận xiên của $(C): y = \frac{x^2 \cos \alpha + 2x \sin \alpha + 6}{x - 2}$ đến gốc toạ độ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 \cos \alpha + 2x \sin \alpha + 6}{x - 2} = x \cos \alpha + 2(\cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{6 + 4(\sin \alpha + \cos \alpha)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x \cos \alpha + 2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 4(\sin \alpha + \cos \alpha)}{x - 2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{TCX: } (D_\alpha): y = x \cos \alpha + 2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha$$

Gọi d là khoảng cách từ $O(0,0)$ đến TCX

$$d = \frac{2|\cos \alpha + \sin \alpha|}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = \frac{2\left|1 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cos \alpha\right|}{\sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}} \leq \frac{2\sqrt{\left(1^2 + \frac{1}{2}\right)(\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha)}}{\sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}} = \sqrt{6}$$

$$\text{Max } d = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2} \cos \alpha} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \arctg 2 + k\pi$$

Bài 6. Cho M bất kì $\in (C): y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$. Tiếp tuyến tại M cắt 2 tiệm cận tại A, B . Gọi I là giao của 2 tiệm cận.

a. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB .

b. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận là không đổi.

c. Chứng minh rằng $S_{\Delta IAB}$ là không đổi $\forall M \in (C)$

d. Tìm vị trí $M \in (C)$ để chu vi của ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

$$\bullet y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{x - 1} \Rightarrow \begin{cases} \text{TCĐ: } x = 1 \\ \text{TCX: } y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Gọi } M(x_M, y_M) \in (C) \text{ với } x_M = m, y_M = \frac{m}{2} - 1 + \frac{1}{m - 1}$$

$$\text{Đạo hàm: } y'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(m-1)^2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại M (D): } y = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(m-1)^2} \right] (x-m) + \frac{m}{2} - 1 + \frac{1}{m-1}$$

$$\Rightarrow (D) \cap \text{TCĐ} \equiv A \left(1, \frac{2}{m-1} - \frac{1}{2} \right); (D) \cap \text{TCX} \equiv B \left(2m-1, m - \frac{3}{2} \right)$$

a. Do A, M, B thẳng hàng và $\frac{x_A + x_B}{2} = m = x_M \Rightarrow M$ là trung điểm của AB.

b. Khoảng cách từ M đến TCĐ là $d_1 = |m-1|$, đến TCX là $d_2 = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot |m-1|}$.

$$\text{Ta có: } d_1 \cdot d_2 = |m-1| \cdot \frac{2}{\sqrt{5} \cdot |m-1|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

$$\text{c. Kê } BH \perp AI \Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot BH = \frac{1}{2} |y_A - y_I| \cdot |x_B - x_H| = \frac{1}{2} \left| \frac{2}{m-1} \right| \cdot |2(m-1)| = 2$$

$$\Rightarrow (\text{đpcm})$$

$$\text{d. • Bổ đề: } P \geq 2\sqrt{\frac{2S}{\sin C}} \left(1 + \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{• Chứng minh: } P &= a+b+c = a+b+\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C} \geq 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab-2ab\cos C} \\ &= 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} \sin \frac{C}{2} = 2\sqrt{ab} \left(1 + \sin \frac{C}{2} \right) = 2\sqrt{\frac{2S}{\sin C}} \left(1 + \sin \frac{C}{2} \right) \Rightarrow (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

• **Áp dụng:** Gọi góc giữa 2 tiệm cận là α , góc giữa TCX với $\overline{Ox}$ là β

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}; \text{tg}\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg}\alpha = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$$

$$\text{Từ bổ đề suy ra: Chu vi } \Delta IAB \geq 2\sqrt{\frac{2S_{IAB}}{\sin \alpha}} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \left(\sqrt{2\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5}-1} \right)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow IA = IB = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}} = \sqrt{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{2}{|m-1|} = \sqrt{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$$

Bài 8. Tìm tiệm cận của hàm số $y = f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

Giải

• Tập xác định: $x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in D = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

• $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} \right) = +\infty \Rightarrow$ TĐĐ bên trái là: $x = -3$.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} \right) = +\infty \Rightarrow$ TĐĐ bên phải là: $x = 3$.

• Giả sử hàm số có tiệm cận xiên là: $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = \begin{cases} 2 & \text{khi } x \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{khi } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Với $x \rightarrow +\infty$ thì $a = 2$, khi đó: $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} - (x + 2) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x + 2)\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - (x + 2)^2(x^2 - 9)}{\sqrt{x^2 - 9} [x^2 + (x + 2)\sqrt{x^2 - 9}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^3 + 5x^2 + 36x + 36}{\sqrt{x^2 - 9} [x^2 + (x + 2)\sqrt{x^2 - 9}]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 + \frac{5}{x} + \frac{36}{x^2} + \frac{36}{x^3}}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} \left[1 + \left(1 + \frac{2}{x} \right) \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} \right]} = -2$$

$\Rightarrow$ Hàm số có TCX bên phải là: $y = 2x - 2$.

Với $x \rightarrow -\infty$ thì $a = 0$, khi đó: $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} + (x - 2) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + (x - 2)\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - (x - 2)^2(x^2 - 9)}{\sqrt{x^2 - 9} [x^2 - (x - 2)\sqrt{x^2 - 9}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 36x + 36}{\sqrt{x^2 - 9} [x^2 - (x - 2)\sqrt{x^2 - 9}]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{5}{x} - \frac{36}{x^2} + \frac{36}{x^3}}{-\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} \left[1 + \left(1 - \frac{2}{x} \right) \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} \right]} = -2$$

$\Rightarrow$ Hàm số có TCN bên trái là: $y = -2$.

Vậy hàm số có TĐĐ bên trái là $x = -3$; TĐĐ bên phải là $x = 3$.

TCN bên trái là $y = -2$; TCX bên phải là $y = 2x - 2$.

Bài 9. Tìm tiệm cận theo m của $y = f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-m}}$

Giải

Xét các khả năng sau:

• Nếu $m < 0$ thì $x^2 - m > 0 \forall x \Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-m}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{|x|} - \frac{1}{|x|}}{\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \rightarrow +\infty \\ -1 & \text{khi } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Với $x \rightarrow +\infty$ ta có tiệm cận ngang bên phải là $y = 1$

Với $x \rightarrow -\infty$ ta có tiệm cận ngang bên trái là $y = -1$

• Nếu $m = 0$ thì $y = f(x) = \frac{x-1}{|x|}$, khi đó:

• $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{|x|} = \infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x = 0$; TCN: $y = 1, y = -1$.

• Xét $m > 0$: Ta có miền xác định: $x^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{m}) \cup (\sqrt{m}, +\infty)$

Nếu $m = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty \Rightarrow$ Hàm số có TCD: $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ không phải là TCD.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \rightarrow +\infty \\ -1 & \text{khi } x \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{TCN: } y = -1, y = 1.$$

Xét $0 < m \neq 1$: Khi đó $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-m}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \rightarrow +\infty \\ -1 & \text{khi } x \rightarrow -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{m}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{m}} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-m}} = \infty \Rightarrow \text{TCD: } x = \pm\sqrt{m}; \text{TCN: } y = \pm 1$$

Kết luận: Nếu $m < 0$ thì hàm số có TCN: $y = 1, y = -1$; không có TCD

Nếu $m = 0$ thì hàm số có TCN: $y = 1, y = -1$; TCD: $x = 0$.

Nếu $m = 1$ thì hàm số có TCN: $y = 1, y = -1$; TCD: $x = -1$

Nếu $0 < m \neq 1$ thì hàm số có TCN: $y = 1, y = -1$; TCD: $x = \pm\sqrt{m}$

Bài 10. Tìm tiệm cận của $y = f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Giải

• **Tập xác định:** $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Tiệm cận đứng:** $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) = \infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng bên phải: $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) = 0 \Rightarrow x = -1$ không phải là tiệm cận đứng.

• **Tiệm cận xiên:** Giả sử tiệm cận xiên là $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x-1}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x[(x+1) - (x-1)]}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1 + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1$$

Vậy hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$; tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

Bài 11. Tìm tiệm cận của hàm số $y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 9x^2 - x - 1}$.

Giải

• **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$ nên hàm số không có tiệm cận đứng.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + 9x^2 - x - 1} = \infty \Rightarrow$ hàm số không có tiệm cận ngang.

• **Tiệm cận xiên:** Giả sử tiệm cận xiên là $y = ax + b$, khi đó:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 9x^2 - x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + \frac{9}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 9x^2 - x - 1) - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + 9x^2 - x - 1)^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 9x^2 - x - 1} + x^2}}$$

$$= \frac{9 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{9}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{9}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} + 1}} = \frac{9}{3} = 3$$

Vậy hàm số có tiệm cận là $y = x + 3$.

2. Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải

Bài 1. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của $(C_m): y = \frac{(m+1)x^2 - m^2}{x - m}$ luôn tiếp xúc với một Parabol cố định.

Bài 2. Cho $(C_m): y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - m^3 + m^2 + 2}{x - m}$. Chứng minh rằng:

Tiệm cận xiên của luôn tiếp xúc với một Parabol cố định.

Bài 3. Chứng minh khoảng cách từ gốc toạ độ đến tiệm cận xiên của

$$y = \frac{mx^2 - (m^2 - m + 1)x + m^2 - m + 2}{x - m} \quad (m \neq 0) \text{ không lớn hơn } \sqrt{2}$$

Bài 4. Tìm m để tiệm cận xiên của $(C_m): y = \frac{x^2 + mx + 1}{x - 1}$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 18.

Bài 5. Cho M bất kì $\in (C): y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2}$. Chứng minh rằng:

Tích các khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận của (C) luôn không đổi.

Bài 6. Tìm $M \in (C): y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ để khoảng cách từ M đến giao điểm của 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất.

Bài 7. Tìm α để khoảng cách từ gốc toạ độ đến tiệm cận xiên của

$$(C): y = \frac{3x^2 + 4x \cos \alpha + 7}{x - 1} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Bài 8. Tìm α để khoảng cách từ gốc toạ độ đến tiệm cận xiên của

$$(C): y = \frac{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}{x + 2 \sin \alpha} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Bài 9. Tìm α để khoảng cách từ gốc toạ độ đến tiệm cận xiên của

$$(C): y = \frac{-x^2 \cos \alpha + 2x \sin \alpha + 1}{x + 2} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Bài 10. Tìm α để khoảng cách từ gốc toạ độ đến tiệm cận xiên của

$$(C): y = \frac{4x^2 \sin \alpha + 5x \cos \alpha - 11}{x - 2} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

CHƯƠNG VI: SAI LẦM TRONG CÁC BÀI TOÁN NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ TỔ HỢP

I. SAI LẦM TRONG CÁC BÀI TOÁN NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$I = \int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{-2}^2 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Do hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ gián đoạn trên $[-2, 2]$ nên không được sử dụng định lý Newton – Leibnitz để tính tích phân như cách giải trên.

• *Lời giải đúng:*

Hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2, 2]$ nên gián đoạn trên $[-2, 2]$

Do đó tích phân trên không tồn tại.

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x}$

• *Sai lầm thường gặp:*

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \text{ thì } dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \frac{1}{1+\sin x} = \frac{1+t^2}{(1+t)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = \int 2(t+1)^{-2} d(t+1) = -\frac{2}{t+1} + c$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{-2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \bigg|_0^{\pi} = \frac{-2}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} + 1} - \frac{-2}{\operatorname{tg} 0 + 1}.$$

Do $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ không xác định nên tích phân trên không tồn tại.

• **Nguyên nhân sai lầm:** Do tích phân là giới hạn của tổng vô hạn các hạng tử nên $\frac{-2}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} + 1} = \frac{-2}{\infty} = 0$ vẫn được thừa nhận.

• **Lời giải đúng:**

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \int_0^{\pi} \frac{d\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \bigg|_0^{\pi} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

Bài 3. $I = \int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} \, dx$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$I = \int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} \, dx = \int_0^4 \sqrt{(x-3)^2} \, dx = \int_0^4 (x-3) \, d(x-3) = \frac{(x-3)^2}{2} \bigg|_0^4 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép biến đổi $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$ với $x \in [0, 4]$ là không tương đương.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} \, dx = \int_0^4 \sqrt{(x-3)^2} \, dx = \int_0^4 |x-3| \, d(x-3) = \\ &= \int_0^3 [-(x-3)] \, d(x-3) + \int_3^4 (x-3) \, d(x-3) = \frac{-(x-3)^2}{2} \bigg|_0^3 + \frac{(x-3)^2}{2} \bigg|_3^4 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5 \end{aligned}$$

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

• **Thiếu sót thường gặp:** $I = \int_{-1}^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \arctg(x+1) \Big|_{-1}^0 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$

• **Nguyên nhân thiếu sót:** Trong cách tính nguyên hàm ta đã dùng kết quả biểu diễn theo $\arctg$ là khái niệm không có trong sách giáo khoa hiện thời

• **Lời giải đúng:** Đặt $u = x + 1 = \operatorname{tg} t \Rightarrow du = (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt = (1 + u^2) dt$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + u^2) dt}{1 + u^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx$

• **Thiếu sót thường gặp:** $I = \int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx = \int_4^8 \frac{x\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 16} \Rightarrow dt = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 16}} \Rightarrow x dx = t dt$

$$I = \int_4^8 \frac{x\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx = \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2 + 16} = \int_0^{4\sqrt{3}} \left(1 - \frac{16}{t^2 + 16}\right) dt = \left[t - 4 \arctg \frac{t}{4}\right]_0^{4\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$$

• **Nguyên nhân thiếu sót:** Trong cách tính nguyên hàm ta đã dùng kết quả biểu diễn theo $\arctg$ là khái niệm không có trong sách giáo khoa hiện thời

• **Lời giải đúng:** Đặt $x = \frac{4}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{4 \sin t}{\cos^2 t} dt$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4 \sin t}{\cos^2 t \cdot \frac{4}{\cos t}} \cdot \sqrt{16 \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 t dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(1 + \operatorname{tg}^2 t) - 1] dt = 4 [\operatorname{tg} t - t]_0^{\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

• **Thiếu sót thường gặp:** Đặt $\frac{1+x}{1-x} = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \Rightarrow dx = \frac{4t dt}{(t^2 + 1)^2}$

Khi đó: $I = 4 \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2} dt$. Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \frac{t dt}{(t^2 + 1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \frac{-1}{2(t^2 + 1)} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= 4 \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2} dt = 4 \left[\frac{-t}{2(t^2 + 1)} \right]_1^{1+\sqrt{2}} + 2 \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 + 1} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \arctg t \Big|_1^{1+\sqrt{2}} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 [\arctg(1 + \sqrt{2}) - \arctg 1] = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân thiếu sót:** Trong cách tính nguyên hàm ta đã dùng kết quả biểu diễn theo $\arctg$ là khái niệm không có trong sách giáo khoa hiện thời

• **Lời giải đúng:** Đặt $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$

$$I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1 + \cos t}{1 - \sin t}} \cdot \sin t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t) dt = [t + \sin t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 7. Tính tích phân: $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 2} dx$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} = \frac{1}{4} \ln |\sin 2x| \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép biến đổi $\sqrt{(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)^2} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ với $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$ là không tương đương.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} |\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x| dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left| \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right| dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{|\cos 2x|}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx - \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx \right) = \frac{1}{4} \left(\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} - \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \ln |\sin 2x| \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} - \frac{1}{4} \ln |\sin 2x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{4} \left(\ln 1 - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln 1 \right) = \frac{1}{4} \ln \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Bài 8. Tính tích phân: $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$

• **Sai lầm thường gặp:**

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right) dx = 2 \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = 4$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Phép biến đổi $\sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = \sin x + \cos x$ với $x \in [0, 2\pi]$ là không tương đương.

• **Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| d\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= 2\sqrt{2} \left[\int_0^{3\pi/2} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) d\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) d\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \left[\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{3\pi/2} - \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} \right] = 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_{1-\sqrt{3}}^{1-\sqrt{2}} \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} ; J = \int_0^1 \frac{9-5x}{\sqrt{4x^2+4x+4}} dx$

II. SAI LÂM TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Một buổi vũ hội hoá trang có 9 nữ và 7 nam. Người ta chọn 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp nhảy. Hỏi có bao nhiêu cách ghép?

• *Sai lầm thường gặp:*

Số cách chọn thứ tự 3 nam trong 7 nam là: $A_7^3 = 7.6.5 = 210$

Số cách chọn thứ tự 3 nữ trong 9 nữ là: $A_9^3 = 9.8.7 = 504$

Số cách chọn 3 cặp nhảy nam, nữ là: $210.504 = 105840$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Quá trình chọn 3 nam trong 7 nam và 3 nữ trong 9 nữ không cần tính đến thứ tự.

• *Lời giải đúng:*

Số cách chọn 3 nam trong 7 nam là: $C_7^3 = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$

Số cách chọn 3 nữ trong 9 nữ là: $C_9^3 = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 84$

Số cách chọn 3 nam và 3 nữ là: $35.84 = 2940$

Giả sử 3 bạn nam là (X, Y, Z) và 3 bạn nữ là (a, b, c). Khi đó ta có 3! cách ghép giữa các cặp này với nhau (là số hoán vị của (X, Y, Z) hoặc (a, b, c)). Vậy số cách ghép 3 cặp nhảy nam, nữ là: $3!C_7^3C_9^3 = 6 \cdot 2940 = 17640$

Bài 2. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể viết thành bao nhiêu số có 9 chữ số trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần và mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần?

• **Sai lầm thường gặp:**

Gọi số thoả mãn là $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$.

Số a_1 có 6 cách viết $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Chữ số $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$ có $8!$ cách viết.

Nếu như coi 3 chữ số 1 là khác nhau thì số $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$ có $6 \cdot 8!$ cách viết.

Với 3 vị trí nào đó của 3 chữ số 1 sẽ có $3!$ hoán vị như nhau.

Vậy số $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$ có $\frac{6 \cdot 8!}{3!} = 40320$ cách viết.

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Nếu coi 3 chữ số 1 là khác nhau thì số a_1 phải có 9 cách viết. Nghĩa là phải giả sử 3 chữ số 1 là khác nhau ngay từ đầu.

• **Lời giải đúng:**

Nếu như coi 3 chữ số 1 là khác nhau thì số a_1 có 8 cách viết $\{1; 1; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Nếu như coi 3 chữ số 1 là khác nhau thì số $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$ có $8!$ cách viết.

Với 3 vị trí nào đó của 3 chữ số 1 sẽ có $3!$ hoán vị như nhau.

Vậy số $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$ có $\frac{8 \cdot 8!}{3!} = 53760$ cách viết.

Bài 3. Trên mặt phẳng cho đa giác lồi 10 cạnh $T = A_1 A_2 \dots A_{10}$. Xét các tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác T . Hỏi trong số các tam giác đó có bao nhiêu tam giác mà 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác T ?

• **Sai lầm thường gặp:**

Số các tam giác phân biệt có 3 đỉnh lấy từ 10 đỉnh của T là $C_{10}^3 = 120$ tam giác.

Ứng với mỗi cạnh đa giác T có 8 cách chọn các đỉnh còn lại để tạo thành tam giác chứa cạnh này. Do có 10 cách chọn cạnh tam giác nên số tam giác có ít nhất 1 cạnh là cạnh của T là $8 \cdot 10 = 80$ tam giác.

Vậy số tam giác mà 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác T là:

$$120 - 80 = 40.$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã tính lặp 2 lần số các tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh liên tiếp của T.

• **Lời giải đúng:**

Số các tam giác phân biệt có 3 đỉnh lấy từ 10 đỉnh của T là $C_{10}^3 = 120$ tam giác.

Ứng với mỗi cạnh đa giác T có 8 cách chọn các đỉnh còn lại để tạo thành tam giác chứa cạnh này. Do có 10 cách chọn cạnh tam giác nên số tam giác có ít nhất 1 cạnh là cạnh của T là $8 \cdot 10 = 80$ tam giác (có thể có tam giác trùng nhau).

Trong 80 tam giác này số các tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh liên tiếp của T là 10 tam giác nhưng bị tính lặp 2 lần. (Ví dụ $\Delta A_1 A_2 A_3 \equiv \Delta A_3 A_2 A_1$) nên số tam giác phân biệt có ít nhất 1 cạnh là cạnh của T là $80 - 10 = 70$ tam giác.

Vậy số tam giác mà 3 cạnh đều không phải là cạnh của đa giác T là $120 - 70 = 50$

Bài 4. Có 7 viên ngọc có màu sắc khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xâu 7 viên ngọc thành 1 sợi dây chuyền đeo cổ ?

• **Sai lầm thường gặp:**

Số các hoán vị thẳng của 7 viên ngọc là 7!

Ứng với mỗi hoán vị vòng có 7 cách chuyển đổi vị trí liên tiếp mà kết quả nhận được là như nhau nên số các hoán vị vòng của 7 viên ngọc sẽ giảm đi 7 lần so với số hoán vị thẳng. Vậy có $7! : 7 = 6! = 720$ cách xâu 7 viên ngọc thành vòng đeo cổ.

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã bỏ qua tính đối xứng của vòng đeo cổ.

• **Lời giải đúng:**

Số các hoán vị thẳng của 7 viên ngọc là $7!$

Ứng với mỗi hoán vị vòng có 7 cách chuyển đổi vị trí liên tiếp mà kết quả nhận được là như nhau nên số các hoán vị vòng của 7 viên ngọc sẽ giảm đi 7 lần so với số hoán vị thẳng. Mặt khác mỗi hoán vị vòng được xác định ta có thể lật ngược lại sợi dây chuyền để nhận được 1 hoán vị vòng khác.

Vậy có $7! : 7 : 2 = 6! : 2 = 360$ cách xâu 7 viên ngọc thành vòng đeo cổ.

Bài 5. Một công viên có 5 cửa ra vào. Hỏi có bao nhiêu cách đi vào 1 cửa và đi ra bằng 1 cửa khác

• **Sai lầm thường gặp:** Số cách đi vào 1 cửa và đi ra bằng 1 cửa khác là số tổ hợp chập 2 của 5 phần tử và bằng $C_5^2 = 10$ cách

• **Nguyên nhân sai lầm:** Vì với 2 cửa A, B thì lộ trình đi vào cửa A, đi ra cửa B khác với lộ trình đi vào cửa B, đi ra cửa A nên số cách chọn 2 cửa có tính thứ tự.

• **Lời giải đúng 1:** Số cách đi vào 1 cửa và đi ra bằng 1 cửa khác là số chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử và bằng $A_5^2 = 20$ cách

• **Lời giải đúng 2:** Có 5 cách chọn cửa đi vào và ứng với mỗi cách chọn cửa đi vào có 4 cách chọn cửa đi ra. Vậy số cách chọn là: $5 \times 4 = 20$ cách

B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

- Bài 1.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể viết được bao nhiêu cách viết số có 10 chữ số mà chữ số 1 có mặt 1 lần, chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần và chữ số 4 có mặt 4 lần ? Tính tổng tất cả các số được tạo thành.
- Bài 2.** Có 10 lá thư và 10 phong bì đã ghi địa chỉ người nhận. Có bao nhiêu cách cho 10 lá thư vào 10 phong bì sao cho có đúng 7 lá thư không đến đúng người nhận ?
- Bài 3.** Cho 15 điểm trên mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hãy tính số giao điểm lớn nhất của các đường thẳng nối 2 trong 15 điểm đã cho với yêu cầu các giao điểm khác với 15 điểm đó.
- Bài 4.** Cho 2 đường thẳng song song d_1, d_2 . Lấy 17 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{17} \in d_1$; 20 điểm $B_1, B_2, \dots, B_{20} \in d_2$. Tính số tam giác có các đỉnh là A_i, B_j .
- Bài 5.** Cho tam giác ABC. Xét tập hợp 4 đường thẳng song song với AB, 5 đường thẳng song song với BC và 6 đường thẳng song song với CA. Hỏi các đường thẳng này tạo được bao nhiêu tam giác và bao nhiêu hình thang?
- Bài 6.** Một lớp học có 40 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Cần chọn 8 học sinh để lập đội tuyển tham dự SEAGames 22. Hỏi có bao nhiêu cách chọn có ít nhất 3 học sinh nữ?
- Bài 7.** Một lớp gồm 16 học sinh, trong đó có 3 học sinh giỏi, 5 học sinh khá, 8 học sinh trung bình. Hỏi có bao nhiêu cách chia 16 học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ có 8 người sao cho mỗi tổ đều có học sinh giỏi và có ít nhất 2 học sinh khá?
- Bài 8.** Có n học sinh nam và n học sinh nữ ngồi quanh 1 bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để không có 2 học sinh cùng giới ngồi cạnh nhau?

CHƯƠNG VII: SAI LẦM TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

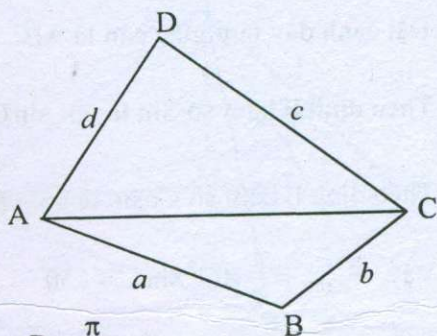
A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho một tứ giác có độ dài 4 cạnh là a, b, c, d và diện tích là S .

Chứng minh rằng $S \leq \frac{ab+cd}{2}$

• Sai lầm thường gặp:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{ab \sin B}{2} + \frac{cd \sin D}{2} \\ &\leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} = \frac{ab+cd}{2} \Rightarrow (\text{đpcm}) \end{aligned}$$



$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \sin B = \sin D = 1 \Leftrightarrow B = D = \frac{\pi}{2}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Cách giải trên đã xét thiếu 1 trường hợp.

• Lời giải đúng:

Trường hợp 1: Cạnh có độ dài a liền kề với cạnh có độ dài b .

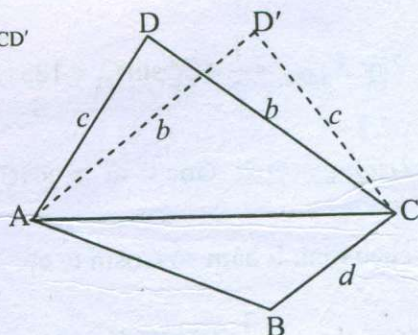
$$\text{Khi đó } S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{ab \sin B}{2} + \frac{cd \sin D}{2} \leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} = \frac{ab+cd}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \sin B = \sin D = 1 \Leftrightarrow B = D = \frac{\pi}{2}$$

Trường hợp 2: Cạnh có độ dài a đối diện với cạnh có độ dài b .

$$\text{Khi đó } S = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABC} + S_{ACD'} = S_{ABCD'}$$

$$\begin{aligned} &= S_{ABD'} + S_{BCD'} = \frac{ab \sin \widehat{BAD'}}{2} + \frac{cd \sin \widehat{BCD'}}{2} \\ &\leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} = \frac{ab+cd}{2} \Rightarrow (\text{đpcm}) \end{aligned}$$



$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \sin \widehat{BAD'} = \sin \widehat{BCD'} = 1$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAD'} = \widehat{BCD'} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ACD} = \widehat{BCA} + \widehat{CAD} = \frac{\pi}{2}$$

Bài 2. Cho đường tròn có chu vi bằng 26π .

Tính diện tích của tam giác cân biết cạnh đáy bằng 10.

• **Sai lầm thường gặp:**

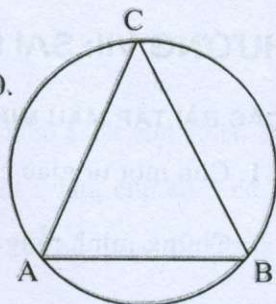
Ta có: $P_{()} = 2\pi R = 26\pi \Rightarrow R = 13$

Đặt cạnh đáy tam giác cân là AB.

Theo định lí hàm số Sin ta có: $\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos C = \frac{12}{13}$

Theo định lí hàm số Cosin ta có: $AB^2 = 2AC^2 - 2AC^2 \cos C \Rightarrow AC^2 = 1300$

Vậy $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC^2 \sin C = 250$



• **Nguyên nhân sai lầm:**

Lời giải trên đã xét thiếu trường hợp góc C tù.

• **Lời giải đúng:**

Ta có: $P_{()} = 2\pi R = 26\pi \Rightarrow R = 13$

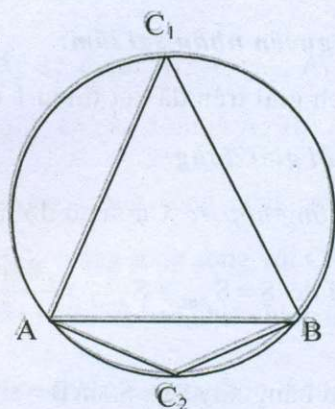
Đặt cạnh đáy tam giác cân là AB.

Theo định lí hàm số Sin ta có: $\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{5}{13}$

Trường hợp 1: Góc C nhọn. $\Rightarrow \cos C_1 = \frac{12}{13}$

Theo định lí hàm số Cosin ta có: $AB^2 = 2AC_1^2 - 2AC_1^2 \cos C_1 \Rightarrow AC_1^2 = 650$

Vậy $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC_1^2 \sin C_1 = 125$



Trường hợp 2: Góc C tù $\Rightarrow \cos C_2 = -\frac{12}{13}$

Theo định lí hàm số Cosin ta có: $AB^2 = 2AC_2^2 - 2AC_2^2 \cos C_2 \Rightarrow AC_2^2 = 26$

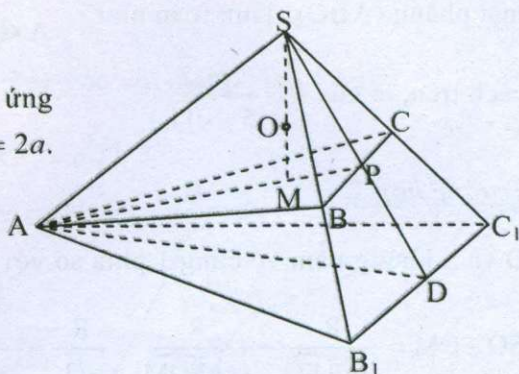
Vậy $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC_2^2 \sin C_2 = 5$

Bài 3. Một góc phẳng của một góc tam diện đỉnh S có giá trị bằng 60° . Trên các cạnh của tam diện lấy lần lượt các điểm A, B, C sao cho $SA = 2a$, $SB = SC = a$. Tìm bán kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt của góc tam diện và mặt phẳng (ABC).

• **Sai lầm thường gặp:**

Trên các tia SB và SC lấy tương ứng B_1 và C_1 sao cho: $SB_1 = SC_1 = SA = 2a$.

Khi đó $\triangle AB_1C_1$ đều và $\triangle ABC$ là thiết diện của chóp SAB_1C_1 nên tâm của hình cầu nằm trên đường cao SQ của tứ diện AB_1C_1S .



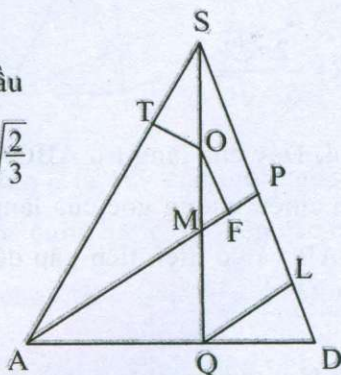
Xét $\triangle ASD$, ta có: $SD = AD = a\sqrt{3}$

Gọi T và F tương ứng là tiếp điểm của hình cầu

với AS và AP. Khi đó: $AQ = 2QD$, $SQ = 2a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$

Kẻ $QL \parallel AP$, suy ra: $\frac{DL}{PL} = \frac{QD}{QA} = \frac{1}{2}$;

$$\frac{QM}{SM} = \frac{PL}{PS} = \frac{PL}{PD} = \frac{2}{3} \Rightarrow SM = \frac{6a}{5} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}.$$



$$\sin \widehat{TSO} = \frac{AQ}{AS} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} \widehat{FOM} = \operatorname{tg} \widehat{MAQ} = \frac{MQ}{AQ} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \cos \widehat{FOM} = \frac{5}{\sqrt{33}}$$

Đặt R là bán kính của mặt cầu cần tính, ta có:

$$SO + OM = \frac{R}{\sin \widehat{TSO}} + \frac{R}{\cos \widehat{FOM}} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{R}{\frac{5}{\sqrt{33}}} = R \cdot \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{33}}{5} = SM = \frac{6a}{5} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2a\sqrt{2}}{5 + \sqrt{11}}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

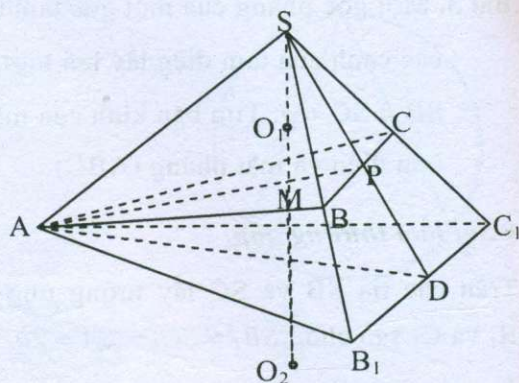
Cách giải trên đã xét thiếu trường hợp tâm O và đỉnh S nằm ở 2 phía của mặt phẳng (ABC). Bài toán trên cần có 2 lời giải.

• **Lời giải đúng:**

Trường hợp 1:

O và S nằm về cùng 1 phía so với mặt phẳng (ABC). Tính toán như

cách trên, ta có: $R = \frac{2a\sqrt{2}}{5 + \sqrt{11}}$



Trường hợp 2:

O và S không nằm về cùng 1 phía so với mặt phẳng (ABC).

$$SO - OM = \frac{R}{\sin \widehat{TSO}} - \frac{R}{\cos \widehat{FOM}} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{R}{\frac{5}{\sqrt{33}}} = R \cdot \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{33}}{5} = SM = \frac{6a}{5} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2a\sqrt{2}}{5 - \sqrt{11}}$$

Bài 4. Đáy của lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ là tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của lăng trụ xuống mặt (ABC) là hình thang có cạnh bên AB và có diện tích gấp đôi diện tích đáy. Tính đường cao lăng trụ nếu $AB_1 = b$.

• Sai lầm thường gặp:

Gọi $A_2B_2C_2$ là hình chiếu của $A_1B_1C_1$ xuống mặt phẳng (ABC) .

Theo đề bài ta có: $S_{ABB_7C_7} = 2S_{ABC}$

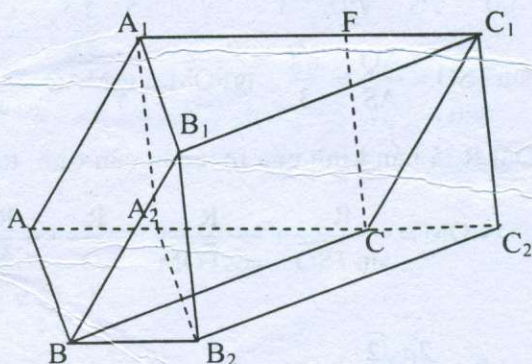
$$\Rightarrow S_{BCC, B_1} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow FC_1 = CC_2 = \frac{1}{2} \cdot AC = a$$

$$\Rightarrow A_1 F = A_2 C = a \Rightarrow A_2 C_2 = A_2 C + C C_2 = 2a.$$

Do $B_2C_2 = BC = 2a$; $A_2B_2 = AB = 2a \Rightarrow \Delta A_2B_2C_2$ đều.

$$\Rightarrow CB_2 = a\sqrt{3} \Rightarrow AB_2 = \sqrt{AC^2 + A_2C^2} = a\sqrt{7}$$



Xét ΔKQP , ta có:

$$\frac{KP}{\sin \widehat{KQP}} = \frac{QP}{\sin \widehat{QKP}} = \frac{KQ}{\sin \widehat{KPQ}} \Leftrightarrow \frac{\frac{2a}{3}}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} = \frac{QP}{\sin \alpha} = \frac{KQ}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow QP = \frac{2a \sin \alpha}{3 \sin(\alpha + \beta)}, KQ = \frac{2a \sin \beta}{3 \sin(\alpha + \beta)}$$

Ta có: $SK = \frac{KO}{\cos \widehat{SKO}} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$. Xét $\Delta ABS \sim \Delta NMS$: $\frac{MN}{AB} = \frac{SQ}{SK} = 1 - \frac{KQ}{SK}$

$$\Rightarrow MN = AB \left(1 - \frac{KQ}{SK}\right) = a \left[1 - \frac{4 \sin \beta \cos \alpha}{3 \sin(\alpha + \beta)}\right]$$

$$\Rightarrow S_{ENMF} = \frac{EF + MN}{2} \cdot QP = \frac{2a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\alpha + \beta)} \left[1 + \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right]$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Cách giải trên đã xét thiếu 2 trường hợp. Bài toán trên cần có 3 lời giải.

• Lời giải đúng:

Trường hợp 1: Q thuộc đoạn SK

Tính toán như cách giải trên ta được: $S_{ENMF} = \frac{2a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\alpha + \beta)} \left[1 + \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right]$

Trường hợp 2: $\beta \in \left[\arctg(3 \operatorname{tg} \alpha), \frac{\pi}{2}\right]$

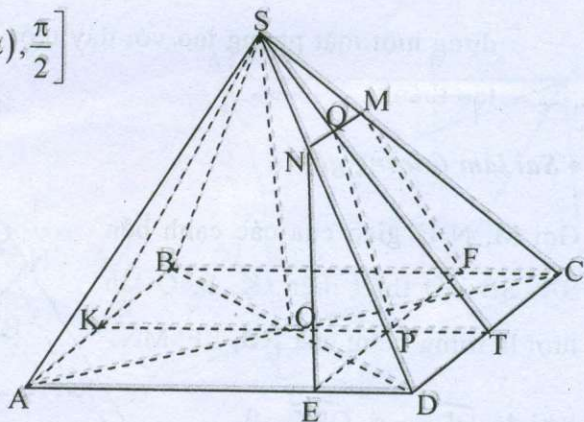
Khi đó: $\widehat{QPO} = \alpha, \widehat{QTO} = \beta$.

Xét ΔPTQ , ta có:

$$\frac{PT}{\sin \widehat{PQT}} = \frac{QP}{\sin \widehat{QTP}} = \frac{QT}{\sin \widehat{QPT}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{QP}{\sin \alpha} = \frac{QT}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow QP = \frac{a \sin \alpha}{3 \sin(\beta - \alpha)}, QT = \frac{a \sin \beta}{3 \sin(\beta - \alpha)}. \text{ Xét } \Delta DCS \sim \Delta NMS \text{ ta có:}$$



$$\frac{MN}{CD} = \frac{SQ}{ST} = 1 - \frac{TQ}{TS} \Rightarrow MN = CD \left(1 - \frac{TQ}{TS} \right) = a \left[1 - \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{3 \sin(\beta - \alpha)} \right]$$

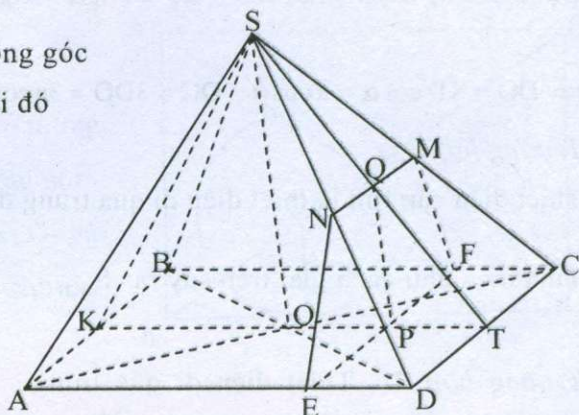
$$\Rightarrow S_{EFMN} = \frac{EF + MN}{2} \cdot PQ = \frac{a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\beta - \alpha)} \left[1 - \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \right]$$

Trường hợp 3: Hình chiếu vuông góc thuộc hình chữ nhật EFCD. Khi đó

$$\widehat{QPT} = \beta, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

Tính toán tương tự ta sẽ được:

$$S_{EFMN} = \frac{a^2 \sin 2\alpha \sin \beta}{9 \sin^2(\beta - \alpha)}$$



Bài 6. Độ dài trung đoạn của mặt bên trong một chóp tam giác đều bằng k .
Cắt chóp bởi một mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của chóp. Tính diện tích thiết diện tạo thành nếu cạnh bên của chóp tạo với mặt đáy của nó một góc β .

• Sai lầm thường gặp:

Thiết diện cần tìm là thiết diện đi qua trung điểm của các cạnh bên chóp, nghĩa là $A_1B_1C_1$.

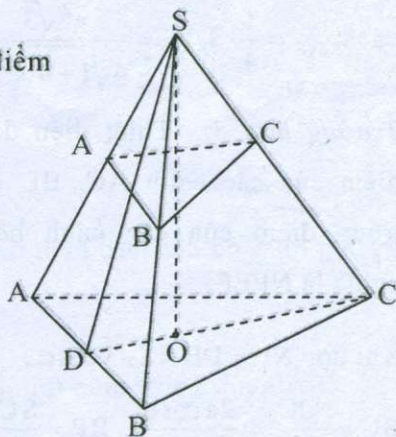
Khi đó đặt $SD = a$, $\widehat{SCO} = \beta$, $\widehat{SDO} = \alpha$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

Suy ra: $DO = SD \cos \alpha = a \cos \alpha$

$$DC = 3DO = 3a \cos \alpha, \quad DB = \sqrt{3} \cdot DO = a\sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = BD \cdot DC = 3\sqrt{3} \cdot a^2 \cos^2 \alpha = \frac{3\sqrt{3}a^2}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta} \Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4(1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta)}$$



• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã xét thiếu 2 trường hợp . Bài toán trên cần có 3 lời giải.

• **Lời giải đúng:**

$$\text{Đặt } SD = a, \widehat{SCO} = \beta, \widehat{SDO} = \alpha, \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4 \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

$$\Rightarrow DO = SD \cos \alpha = a \cos \alpha, DC = 3DO = 3a \cos \alpha, DB = \sqrt{3} \cdot DO = a\sqrt{3} \cos \alpha$$

Trường hợp 1:

Thiết diện cần tìm là thiết diện đi qua trung điểm của các cạnh bên chóp.

$$\text{Tính toán như cách giải trên suy ra: } S_{A_1B_1C_1} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4(1+4 \operatorname{tg}^2 \beta)}$$

Trường hợp 2: Thiết diện đi qua trung điểm của các cạnh AC, BC của đáy và trung điểm của cạnh bên SC, nghĩa là MNP. Khi đó:

$$S_{SAB} = DB \cdot SD = a^2 \sqrt{3} \cos \alpha = \frac{a^2 \sqrt{3}}{\sqrt{1+4 \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

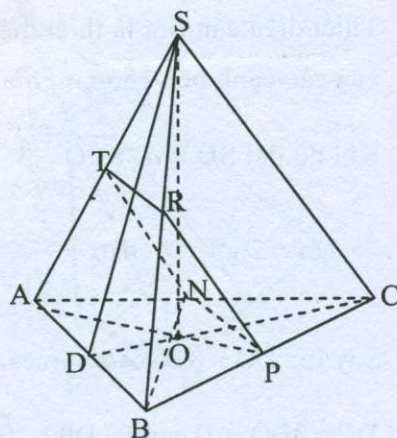
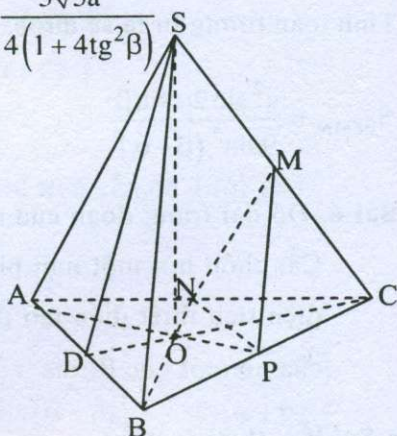
$$\Rightarrow S_{MNP} = \frac{1}{4} \cdot S_{SAB} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4\sqrt{1+4 \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

Trường hợp 3: Thiết diện đi qua trung điểm của các cạnh AC, BC của đáy và trung điểm của các cạnh bên SA, SB nghĩa là NPEF.

$$\text{Khi đó: } NP = DB = a\sqrt{3} \cos \alpha,$$

$$SC = \frac{OC}{\cos \beta} = \frac{2a \cos \alpha}{\cos \beta}, RP = \frac{SC}{2} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \beta}$$

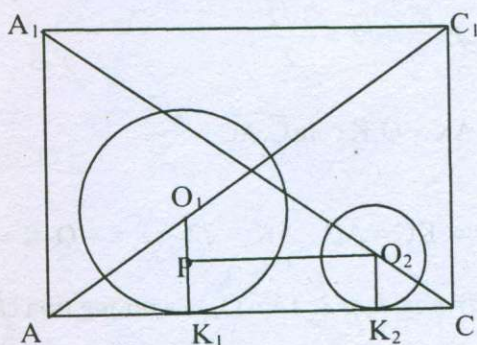
$$\Rightarrow S_{NPRT} = NP \cdot RP = \frac{a^2 \sqrt{3} \cos^2 \alpha}{\cos \beta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{\cos \alpha (1+4 \operatorname{tg}^2 \beta)}$$



Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ và hình cầu bán kính $R = 0,5$ nội tiếp trong góc tam diện đỉnh A của hình lập phương. Tìm bán kính của cầu tiếp xúc với các mặt của góc tam diện đỉnh C của lập phương và tiếp xúc với cầu đã cho, nếu cạnh của hình lập phương $a = 1,5$.

• **Sai lầm thường gặp:**

Xét mặt cắt chéo của hình lập phương $AA_1 C_1 C$. Gọi O_1 là tâm hình cầu nội tiếp trong góc tam diện đỉnh A; O_2 và x là tâm và bán kính của hình cầu cần tìm. Khi đó:



$$\cotg \widehat{C_1AC} = \frac{AC}{CC_1} = \sqrt{2}, \quad \cotg \widehat{C_1AC} = \frac{AC}{CC_1} = \sqrt{2}, \quad \cotg \widehat{A_1CA} = \frac{AC}{AA_1} = \sqrt{2}$$

$$K_1 K_2 = O_2 P = \sqrt{O_1 O_2^2 - O_1 P^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2} = \sqrt{2x}$$

$$AK_1 = O_1 K \cotg \widehat{C_1AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad CK_2 = O_2 K_2 \cotg \widehat{A_1CA} = x\sqrt{2}, \quad AC = a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có: } AC = AK_1 + K_1 K_2 + K_2 C \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2x} + x\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

Cách giải trên đã xét thiếu 2 trường hợp. Bài toán trên cần có 3 lời giải.

• **Lời giải đúng:**

Trường hợp 1: Tâm O_2 của đường tròn cần tìm nằm trong đoạn A_1C .

Đường tròn (O_1) và đường tròn (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau.

Tính toán như cách giải trên ta được bán kính (O_2) là $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Trường hợp 2: Tâm O_2 của đường tròn cần tìm nằm trong đoạn A_1C . Đường tròn (O_1) và đường tròn (O_2) tiếp xúc trong với nhau.

$$AC = a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$AK = O_1K \cotg \widehat{C_1AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow KC = AC - AK = \sqrt{2} \Rightarrow x = O_2K = KC \tg \widehat{A_1CA} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

Trường hợp 3: Tâm O_2 của đường tròn cần tìm nằm trên phần kéo dài của tia A_1C .

Đặt x là bán kính của (O_2) .

$$\text{Khi đó: } O_2P = x - \frac{1}{2},$$

$$K_1K_2 = O_1P = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2P^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2x},$$

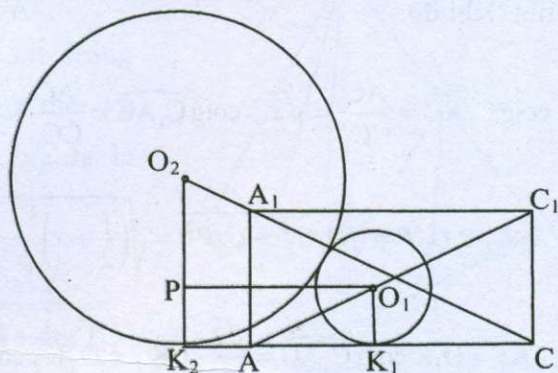
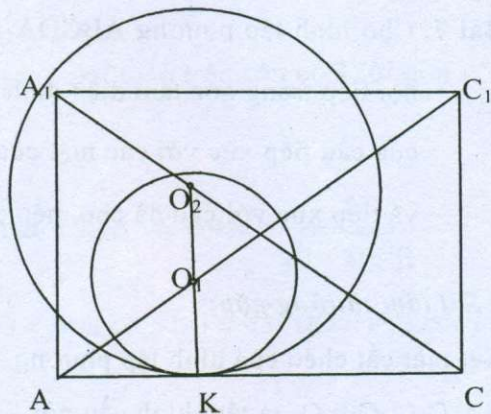
$$K_2C = O_2K_2 \cotg \widehat{O_2CK_2} = x\sqrt{2},$$

$$AK_1 = O_1K_1 \cotg \widehat{C_1AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad AK_2 = K_2C - AC = x\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có: } K_1K_2 = AK_1 + AK_2 \Leftrightarrow \sqrt{2x} = x\sqrt{2} - \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Bài 8. Đáy của chóp tứ giác là một tứ giác lồi. Biết 2 cạnh đáy bằng 6, và 2 cạnh còn lại bằng 10, đường cao của chóp bằng 7. Tất cả các mặt bên lập với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích của chóp.

• **Sai lầm thường gặp:** Gọi chóp tứ giác lồi là SABCD. Nếu tứ giác đáy ABCD có 1 cặp cạnh đối bằng 6 và 1 cặp cạnh đối bằng 10 thì khi đó ABCD là hình bình hành. Dễ thấy khi đó không tồn tại điểm trong không gian cách đều các cạnh của hình bình hành. Vậy chỉ có thể tứ giác ABCD có 2 cặp cạnh kề bằng nhau từng đôi một. Chân đường cao chóp O trùng với tâm đường tròn nội tiếp đáy.

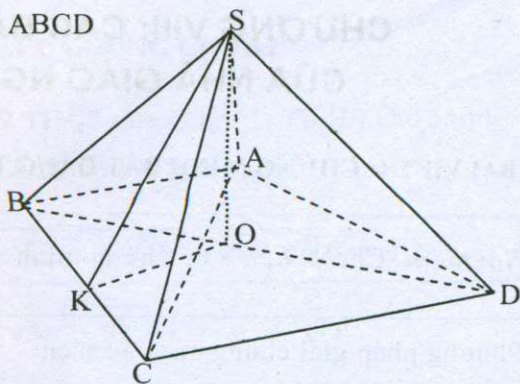


Trường hợp 1: O nằm trong tứ giác ABCD

$$\text{Xét } \Delta SOK: OK = SO \cdot \tan \widehat{SKO} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot OK = \frac{112\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot V_{ABCD} \cdot SO = \frac{748\sqrt{3}}{9}$$



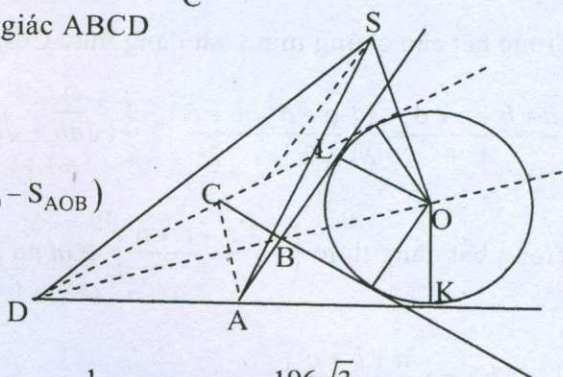
Trường hợp 2: O nằm ngoài tứ giác ABCD

$$OK = OL = SO \cotg 60^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Khi đó } S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2(S_{AOD} - S_{AOB})$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot OK \cdot AD - \frac{1}{2} \cdot OL \cdot AB\right) =$$

$$= OK(AD - AB) = \frac{28\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{196\sqrt{3}}{9}$$



B. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 9. Đáy của chóp SABCD là hình thang cân ABCD có đáy bé $AB = a$, góc nhọn bằng α . Đường cao SO của chóp bằng h . $AO \cap CD \equiv K$ là trung điểm của CD.

Tính góc tạo mặt bên SBC với đáy nếu $AO:OK = 8:1$ và $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

Bài 10. Hình chữ nhật ABCD có đường chéo bằng d , $\widehat{CAD} = \varphi$ là đáy của chóp SABCD. Các mặt bên đối diện nhau qua ASB và CSD lập với mặt đáy góc α và 2α tương ứng. Tính thể tích chóp nếu $AS = BS$.

Bài 11. Trong hộp chữ nhật ABCD₁B₁C₁D₁ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{7}$. Góc giữa các đường thẳng BC₁ và CD₁ bằng 45° . Tính cạnh AA₁.

Bài 12. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là 1 tam giác vuông với cạnh huyền $BC = a$, góc nhọn $B = \alpha$. Các cạnh bên của hình chóp SABC tạo với mặt đáy 1 góc β . Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

CHƯƠNG VIII: CÁC BÀI VIẾT CHỌN LỌC CỦA NHÀ GIÁO NGUYỄN ĐỨC TÂN

BÀI VIẾT 1: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI VỚI BA SỐ KHÔNG ÂM

Bài toán: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Phương pháp giải chung của các sách:

Trước hết cần chứng minh bất đẳng thức Côsi cho bốn số $a, b, c, d \geq 0$. Ta có:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

Trong bất đẳng thức $\left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^4 \geq abcd$; Đặt $d = \frac{a+b+c}{3}$ ta nhận được:

$$\left(\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} \right)^4 \geq abc \cdot \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^4 \geq abc \cdot \frac{a+b+c}{3} \quad (2)$$

Trường hợp $a+b+c=0$ hay $a=b=c=0$ thì hiển nhiên $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Trường hợp $a+b+c \neq 0$ thì từ (2) suy ra $\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \geq abc$ suy ra

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Vậy bất đẳng thức Côsi cho 3 số được chứng minh.

Cách giải hay: Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm ta có:

$$a+b+c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{c\sqrt[3]{abc}}) \geq$$

$$\geq 2 \cdot 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{c\sqrt[3]{abc}}} = 4 \cdot \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

BÀI VIẾT 2: LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

Trong đề thi chọn học sinh giỏi toán 9 THCS của Quận 1, Tp Hồ Chí Minh năm học 2000 – 2001 vào ngày 29/11/2000 có bài toán sau:

Bài toán: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - \sqrt{4x^2 - 4x + 4} = 9x - 3$

Sai lầm thường gặp: $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - \sqrt{4x^2 - 4x + 4} = 9x - 3$ (1)

Đặt $a = \sqrt{4x^2 + 5x + 1}$; $b = \sqrt{4x^2 - 4x + 4}$ ($a, b \geq 0$)

Ta có $a^2 - b^2 = (4x^2 + 5x + 1) - (4x^2 - 4x + 4) = 9x - 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a + b)(a - b) - (a - b) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0 \Leftrightarrow a - b = 0$ hoặc $a + b - 1 = 0$

• Nếu $a - b = 0$ ta có $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = \sqrt{4x^2 - 4x + 4}$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

• Nếu $a + b - 1 = 0$ ta có $a + b = 1$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow \begin{cases} a - b = 9x - 3 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 9x - 2 \Rightarrow 2\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 9x - 2$ (4)

$$\Leftrightarrow 4(4x^2 + 5x + 1) = (9x - 2)^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 20x + 4 = 81x^2 - 36x + 4$$

$$\Leftrightarrow 65x^2 - 56x = 0 \Leftrightarrow x(65x - 56) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{56}{65}$$

Thử $x = 0$ không thỏa mãn (4); $x = \frac{56}{65}$ thỏa mãn (4)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{56}{65}$

Nguyên nhân sai lầm: Nghiệm $x = \frac{56}{65}$ là nghiệm ngoại lai.

Lời giải sai ở chỗ xét $a + b - 1 = 0$

Chú ý $b = \sqrt{(2x^2 - 1)^2 + 3} \geq \sqrt{3}$ để loại trường hợp $a + b = 1$

BÀI VIẾT 3: KẾT QUẢ NÀO ... SAI?

Bài toán: Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính: $a^{1981} + \frac{1}{a^{1981}}$ (Đề thi chuyên toán 1981)

Lời giải

Từ $a^2 + a + 1 = 0$ suy ra $a^3 + a^2 + a = 0$ hay $a^3 = -a^2 - a = 1$

Do đó $(a^3)^k = a^{3k} = 1$ ta có $1981 = 3 \cdot 660 + 1$. Vậy $a^{1981} = a^{3 \cdot 660 + 1} = a^{3 \cdot 660} \cdot a = a$

nên $a^{1981} + \frac{1}{a^{1981}} = a + \frac{1}{a} = a + \frac{a^3}{a} = a + a^2 = -1$

Mặt khác từ đẳng thức $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$ suy ra $a^{1981} + \frac{1}{a^{1981}} = 2$

Vậy tổng phải tìm là -1 hay 2 ?

Giải đáp

Làm gì có số a nào thỏa mãn $a^2 + a + 1 = 0$ nên tổng $a^{1981} + \frac{1}{a^{1981}}$ không tồn tại được. Còn nếu nói đến các số ảo thì kết quả thứ nhất sẽ đúng, còn cách làm thứ hai vẫn sai vì dù có cả số ảo thì từ $a^2 + a + 1$ cũng không suy ra được $a = 1$. Không hiểu thời ...1981 đáp án bài thi sẽ như thế nào?

BÀI VIẾT 4: CÓ GÌ CHƯA ÒN CHĂNG?

Bài toán: Tìm m để: $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

(Đề thi vào lớp 10 trường Lê Hồng Phong Tp HCM 2003 - 2004)

Lời giải

$\Delta' = m^2 + 6m + 9 = (m + 3)^2$. Phương trình có hai nghiệm là:

$x_1 = m + m + 3 = 2m + 3$ và $x_2 = m - (m + 3) = -3$.

Phương trình có hai nghiệm đều âm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 < 0 \\ -3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m < -3 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$

Giải đáp

$m = -3$ thì $\Delta' = 0$. Phương trình có nghiệm kép chứ đâu có...hai nghiệm phân biệt.

Chỉ cần bổ sung thêm. Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \neq 2m + 3 < 0 \\ -3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m < -3 \\ 2m \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ m \neq -3 \end{cases}$$

BÀI VIẾT 5: LỜI GIẢI HAY CHO MỘT BÀI TOÁN ...KHÓ!

Bài toán: Chứng minh không tồn tại tam giác có độ dài các đường cao là $1; \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}$.

Hầu hết các sách báo về toán đều cho lời giải như sau:

Giả sử tồn tại một tam giác có các cạnh là a, b, c và độ dài các đường cao

tương ứng là $h_a = 1, h_b = \sqrt{5}, h_c = 1 + \sqrt{5}$. Ta có: $a = \frac{2S}{h_a}, b = \frac{2S}{h_b}, c = \frac{2S}{h_c}$

$$\text{Mà } a < b + c \Leftrightarrow \frac{2S}{h_a} < \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} \Leftrightarrow \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \Leftrightarrow \frac{1}{1} < \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \Leftrightarrow 1 < \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 20 < 9\sqrt{5} - 5 \Leftrightarrow 25 < 9\sqrt{5} \Leftrightarrow 25^2 < (9\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 625 < 405 \Rightarrow \text{vô lý.}$$

Vậy không tồn tại một tam giác mà độ dài các đường cao là $1; \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}$.

Bình luận

Lời giải... đã quên rằng $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ nên mới "dài dòng rối rắm" như thế!

Lời giải ngắn gọn

Ta có $2S = a \cdot 1 = b\sqrt{5} = c(1 + \sqrt{5})$ suy ra $2a = a + a = b\sqrt{5} + c(1 + \sqrt{5})$

$$= \sqrt{5}(b + c) + c > \sqrt{4}(b + c) = 2(b + c) \Rightarrow a > b + c \Rightarrow \text{vô lý!}$$

Vậy không tồn tại một tam giác mà độ dài các đường cao là $1; \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}$.

BÀI VIẾT 6: MỘT LỜI GIẢI ...BẤT NGỜ!

Bài toán: Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

Bình luận

Quyển sách "Đa thức và ứng dụng" của tác giả Nguyễn Hữu Điển – NXB Giáo dục 2003 và một số sách báo về toán đã cho lời giải như sau:

Đặt $x = a + b - c, y = a - b + c, z = -a + b + c$ ta có:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)[(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2] > (x + y)^3 + (y + z)^3 + (z + x)^3$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) + 3xyz > 0 \text{ luôn đúng}$$

Nhận xét: Lời giải trên khá cầu kỳ. Thực ra chỉ một chút khéo léo biến đổi đại số ta sẽ có một lời giải... bất ngờ như sau

Lời giải hay

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) = a^2(a + b + c) + b^2(a + b + c) + c^2(a + b + c)$$

$$> a^2(a + a) + b^2(b + b) + c^2(c + c) = 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

BÀI VIẾT 7: CÚ TUỞNG LÀ ... ĐÚNG!

Bài toán: Cho $a, b, x, y, z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất theo a, b của biểu thức:

$$S = \frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} + \frac{y^2}{(az + bx)(ax + bz)} + \frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)}$$

(Đề thi lớp 11 Olympic 30/4 lần thứ 9 năm 2003)

• **Sai lầm thường gặp:**

• **Bổ đề:**
$$\frac{m}{p+q} + \frac{p}{q+m} + \frac{q}{m+p} \geq \frac{3}{2} \quad \forall m, p, q > 0$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\begin{cases} ay + bz \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(y^2 + z^2)} \\ az + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(z^2 + y^2)} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} \geq \frac{x^2}{(a^2 + b^2)(y^2 + z^2)}$$

Tương tự và suy ra:
$$S \geq \frac{1}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{y^2 + z^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2} \right) \geq \frac{3}{2(a^2 + b^2)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$, khi đó:
$$\text{Min } S = \frac{3}{2(a^2 + b^2)}$$

Nguyên nhân sai lầm:
$$\text{Min } S = \frac{3}{2(a^2 + b^2)}$$
 xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z > 0 \\ a = b > 0 \end{cases}$

nhưng trong giả thiết chưa cho $a = b$ nên với $a \neq b$ thì kết quả trên sai.

Lời giải đúng

Ta có:
$$(ay + bz)(az + by) = (a^2 + b^2)yz + ab(y^2 + z^2) \leq$$

$$\leq (a^2 + b^2) \frac{y^2 + z^2}{2} + ab(y^2 + z^2) = \frac{y^2 + z^2}{2} (a^2 + b^2 + 2ab) = \frac{1}{2} (a + b)^2 (y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow S = \frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} + \frac{y^2}{(az + bx)(ax + bz)} + \frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)}$$

$$\geq \frac{2}{(a+b)^2} \left(\frac{x^2}{y^2 + z^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2} \right) \geq \frac{3}{(a+b)^2}$$

Với $x = y = z$ thì
$$\text{Min } S = \frac{3}{(a+b)^2}$$

BÀI VIẾT 8: TỪ MỘT LỜI GIẢI ĐI ĐẾN BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

Bài toán: Chứng minh rằng: $\frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 8 \quad \forall a, b, c > 0$

(Đề thi học sinh giỏi THPT của TP Hồ Chí Minh năm 2003)

Lời giải

$$\text{Đặt } b+c=x; c+a=y; a+b=z \Rightarrow a=\frac{-x+y+z}{2}; b=\frac{x-y+z}{2}; c=\frac{x+y-z}{2}$$

Do $a, b, c > 0$ nên $x, y, z > 0$ và $x < y+z; y < z+x; z < x+y$ (1)

$$\text{Ta có: } \frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{25(-x+y+z)}{2x} + \frac{16(x-y+z)}{2y} + \frac{x+y-z}{2z}$$

$$= \left(\frac{25y}{2x} + \frac{16x}{2y} \right) + \left(\frac{25z}{2x} + \frac{x}{2z} \right) + \left(\frac{16z}{2y} + \frac{y}{2z} \right) - 21$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{25y}{2x} \cdot \frac{16x}{2y}} + 2\sqrt{\frac{25z}{2x} \cdot \frac{x}{2z}} + 2\sqrt{\frac{16z}{2y} \cdot \frac{y}{2z}} - 21 = 20 + 5 + 4 - 21 = 8$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1} = \frac{y+z}{4+1} = \frac{y+z}{5} \Rightarrow x = y+z \text{ mâu thuẫn với (1)}$$

$$\text{Vậy dấu bằng không xảy ra, tức là: } \frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 8 \quad \forall a, b, c > 0$$

Bài toán tổng quát: Cho $m, n, p, a, b, c > 0$. Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \geq \frac{1}{2}(\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2 - (m+n+p)$$

Chú dẫn: Làm tương tự như trên với chú ý dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{x}{\sqrt{m}} = \frac{y}{\sqrt{n}} = \frac{z}{\sqrt{p}} = \frac{y+z}{\sqrt{n} + \sqrt{p}} = \frac{z+x}{\sqrt{p} + \sqrt{m}} = \frac{x+y}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} \sqrt{m} \geq \sqrt{n} + \sqrt{p} \\ \sqrt{n} \geq \sqrt{p} + \sqrt{m} \\ \sqrt{p} \geq \sqrt{m} + \sqrt{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq y+z \\ y \geq z+x \\ z \geq x+y \end{cases} \text{ mâu thuẫn với } \begin{cases} x < y+x \\ y < z+x \\ z < x+y \end{cases}$$

$$\text{Từ đó dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{b+c}{\sqrt{m}} = \frac{c+a}{\sqrt{n}} = \frac{a+b}{\sqrt{p}} \text{ và } \begin{cases} \sqrt{m} < \sqrt{n} + \sqrt{p} \\ \sqrt{n} < \sqrt{p} + \sqrt{m} \\ \sqrt{p} < \sqrt{m} + \sqrt{n} \end{cases}$$

CHƯƠNG IX: LỜI GIẢI MẪU CHO CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH TOÀN QUỐC CỦA BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO

ĐỀ SỐ 1: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002 (KHỐI A)

Câu I. (Đại học: 2,5 điểm; Cao đẳng: 3,0 điểm)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$

1. Khảo sát sự biến thiên và đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2. Tìm k để phương trình $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
3. Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị.

Câu II. (Đại học: 1,5 điểm; Cao đẳng: 2,0 điểm)

Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$

1. Giải phương trình khi $m = 2$.
2. Tìm m để phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$

Câu III. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 2,0 điểm)

1. Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0, 2\pi)$ của phương trình:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$$

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$.

Câu IV. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 3,0 điểm)

1. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài các cạnh đáy bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích ΔAMN , biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).
2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho 2 đường

$$\text{thẳng: } \Delta_1: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (Δ_1) và song song với đường thẳng (Δ_2) .

b) Cho điểm $M(2; 1; 4)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng (Δ_2) sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

Câu V. (Đại học: 2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, xét ΔABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC .

2. Cho khai triển nhị thức sau với n là số nguyên dương

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1} \left(2^{\frac{-x}{3}}\right) + \dots + C_n^{n-1} \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right) \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5 \cdot C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$, tìm n và x.

ĐÁP ÁN

Câu I. (Đại học: 2,5 điểm)

$$y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$$

1. Khảo sát hàm số với $m = 1$: $y = -x^3 + 3x^2$ (1 điểm)

Tập xác định: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Đạo hàm: } y' = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y(x_1) = 0 \\ y_2 = y(x_2) = 4 \end{cases}$$

$$\text{Đạo hàm bậc 2: } y'' = -6x + 6 = -6(x - 1); y'' = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(x_0) = 2$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y''		+	0	-	
y	$+\infty$	CT			$-\infty$

$\nearrow$ CĐ $\searrow$

Nhận xét:

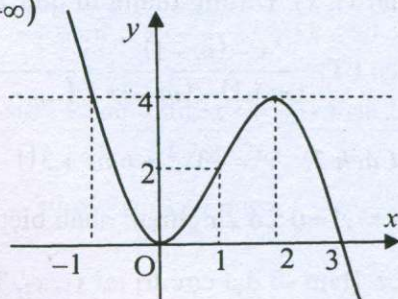
+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

+ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

+ Hàm số lõm trên khoảng $(-\infty; 1)$

+ Hàm số lồi trên khoảng $(1; +\infty)$

+ Hàm số có điểm uốn $U(1; 2)$



Đồ thị: Các điểm đặc biệt CT(0;0), CĐ(2;4), Điểm uốn $U(1;2)$

Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0; 0)$

Giao với Ox: $y = 0 \Leftrightarrow -x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \Rightarrow O(0; 0), (3; 0)$

Điểm phụ của đồ thị: $x = -1 \Rightarrow y(-1) = 4 \Rightarrow (-1; 4)$

2. Tìm k để phương trình $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Cách 1: Phương trình $\Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = -k^3 + 3k^2 \Leftrightarrow f(x) = f(k)$

Nghiệm của phương trình đã cho là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = f(k)$ với đồ thị $y = f(x)$. Nhìn vào đồ thị ta có phương trình đã cho có

$$3 \text{ nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow 0 < f(k) < 4 \Leftrightarrow 0 < -k^3 + 3k^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} k^2(k-3) < 0 \\ k^3 - 3k^2 + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k^2 - 4k + 4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ k+1 > 0 \\ k \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0; k \neq 2 \end{cases}$$

Cách 2: Ta có $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0 \Leftrightarrow (x-k)[x^2 + (k-3)x + k^2 - 3k] = 0$

Phương trình này có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = x^2 + (k-3)x + k^2 - 3k = 0$

$$\text{có 2 nghiệm phân biệt và khác } k \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3k^2 + 6k + 9 > 0 \\ g(k) = 3k^2 - 6k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0; k \neq 2 \end{cases}$$

3. Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị.

Cách 1: $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m-1 \\ x_2 = m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y(x_1) = -m^2 + 3m - 2 \\ y_2 = y(x_2) = -m^2 + 3m + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(m-1; -m^2 + 3m - 2) \\ M_2(m+1; -m^2 + 3m + 2) \end{cases}$$

Do y' triệt tiêu và đổi dấu tại 2 điểm phân biệt x_1, x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 . Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là đường thẳng đi qua M_1, M_2

có PT:
$$\frac{x - (m-1)}{(m+1) - (m-1)} = \frac{y - (-m^2 + 3m - 2)}{(-m^2 + 3m + 2) - (-m^2 + 3m - 2)} \Leftrightarrow y = 2x - m^2 + m$$

Cách 2: $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$. Ta có: $\Delta' = 9m^2 + 9(1 - m^2) = 9 > 0$

$\Rightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và y' đổi dấu tại x_1, x_2 .

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 . Thực hiện phép chia $y(x)$ cho $y'(x)$ ta có:

$$y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{m}{3}\right) \cdot y'(x) + 2x - m^2 + m.$$
 Do $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ nên suy ra:

$$\begin{cases} y_1 = \left(\frac{1}{3}x_1 - \frac{m}{3}\right) \cdot y'(x_1) + 2x_1 - m^2 + m = 2x_1 - m^2 + m \\ y_2 = \left(\frac{1}{3}x_2 - \frac{m}{3}\right) \cdot y'(x_2) + 2x_2 - m^2 + m = 2x_2 - m^2 + m \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = 2x - m^2 + m$

Câu II. (Đại học: 1,5 điểm)

Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (1)

1. Với $m = 2$ thì (1) $\Leftrightarrow \log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$ (2). Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow (t^2 - 1) + t - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t + 3)(t - 2) = 0$

$\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\log_3^2 x + 1} = 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3^{\pm\sqrt{3}}$

2. Tìm m để phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1$. Phương trình $\Leftrightarrow g(t) = t^2 + t - 2m - 2 = 0$

Ta có: $x \in [0; 3^{\sqrt{3}}] \Leftrightarrow t \in [1; 2]$

Cách 1: $g'(t) = 2t + 1 > 0 \quad \forall t \in [1; 2] \Rightarrow$ Hàm số $y = g(t)$ tăng trên $[1; 2]$

Vậy phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow g(1) \leq 0 \leq g(2)$

$\Leftrightarrow -2m \leq 0 \leq 4 - 2m \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$

Cách 2: Gọi t_1, t_2 là 2 nghiệm của phương trình $g(t) = 0$. Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $1 < t_1 < t_2 < 2$ nhưng do $\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{-1}{2} < 1$ nên không thể xảy ra.

Trường hợp 2: $\begin{cases} t_1 \leq 1 \leq t_2 \leq 2 \\ 1 \leq t_1 \leq 2 \leq t_2 \end{cases} \Leftrightarrow g(1)g(2) = -2m(4 - 2m) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$

Câu III. (Đại học: 2,0 điểm)

1. ĐK: $1 + 2\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{12} + k\pi; x \neq -\frac{7\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $5 \cdot \frac{\sin x(1 + 2\sin 2x) + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} = 5 \cdot \frac{\sin x + 2\sin x \sin 2x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}$
 $= 5 \cdot \frac{\sin x + (\cos x - \cos 3x) + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} = 5 \cdot \frac{\sin x + \sin 3x + \cos x}{1 + 2\sin 2x} =$
 $= 5 \cdot \frac{2\sin 2x \cos x + \cos x}{1 + 2\sin 2x} = 5 \cdot \frac{\cos x(1 + 2\sin 2x)}{1 + 2\sin 2x} = 5\cos x$ nên:

Phương trình $\Leftrightarrow 5\cos x = \cos 2x + 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ (loại)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

Do $x \in (0, 2\pi)$ nên lấy $x_1 = \frac{\pi}{3}$ và $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ thỏa mãn điều kiện $1 + 2\sin 2x \neq 0$

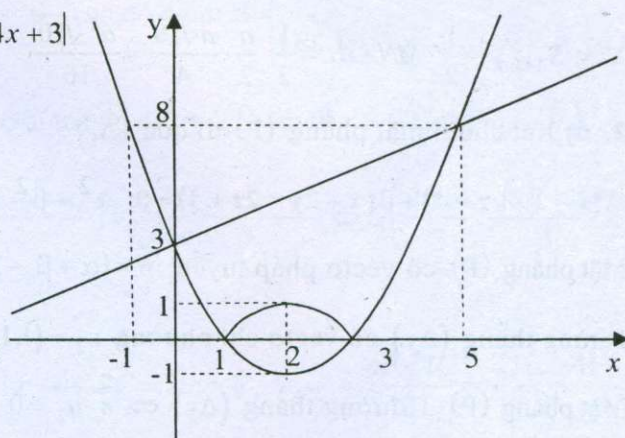
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$

Xét phương trình $\begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3| \\ y = x + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ |x^2 - 4x + 3| = x + 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = -(x + 3) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0; x \geq -3 \\ x^2 - 3x + 6 = 0; x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 5$



Do $|x^2 - 4x + 3| \leq x + 3 \quad \forall x \in [0, 3]$ nên $S = \int_0^5 [(x + 3) - |x^2 - 4x + 3|] dx =$

$= \int_0^1 [(x + 3) - (x^2 - 4x + 3)] dx + \int_1^3 [(x + 3) + (x^2 - 4x + 3)] dx + \int_3^5 [(x + 3) - (x^2 - 4x + 3)] dx$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 5x) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x \right) \Big|_1^3 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_3^5 = \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6}$$

Câu IV. (Đại học: 2,0 điểm)

1. Gọi K là trung điểm của BC, $SK \cap MN \equiv I$

Ta có: $MN = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$, $MN \parallel BC$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN.

Ta có: $\triangle SAM = \triangle SAN$

$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow AI \perp MN$. Lại có: $(AMN) \perp (SBC)$

$\Rightarrow AI \perp SK$ tại trung điểm I của SK $\Rightarrow \triangle ASK$ cân đỉnh A

$\Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

Vậy $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot AI = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$

2. a) Xét chùm mặt phẳng (P) đi qua (Δ_1) :

$\alpha(x - 2y + z - 4) + \beta(x + 2y - 2z + 4) = 0$; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (\alpha + \beta, -2\alpha + 2\beta, \alpha - 2\beta)$

Đường thẳng (Δ_2) có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1, 1, 2)$

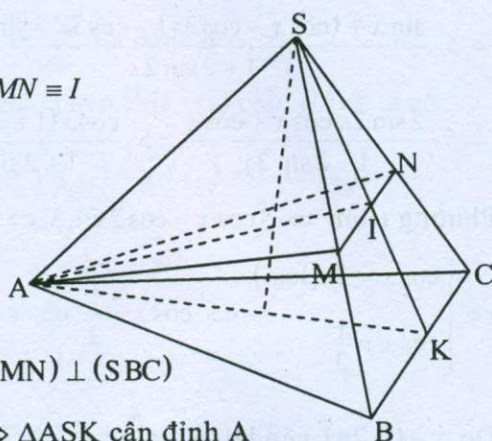
Mặt phẳng (P) $\perp$ đường thẳng $(\Delta_2) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$

$\Leftrightarrow 1 \cdot (\alpha + \beta) + 1 \cdot (-2\alpha + 2\beta) + 2(\alpha - 2\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Thay $\alpha = \beta$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2x - z = 0$

Kiểm tra: Dễ kiểm tra thấy $\Delta_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ không thuộc (P): $2x - z = 0$

Kết luận: Phương trình mặt phẳng (P): $2x - z = 0$



b) Tìm tọa độ H thuộc (Δ_2) sao cho đoạn thẳng MH nhỏ nhất với $M(2; 1; 4)$

Do H thuộc (Δ_2) nên tọa độ H có dạng $(1+t, 2+t, 1+2t)$

Cách 1: Ta có: $\overrightarrow{MH} = (t-1, t+1, 2t-3)$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 11} = \sqrt{6(t-1)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$$

Vậy đoạn MH có độ dài nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $t = 1 \Rightarrow$ tọa độ H(2; 3; 3)

Cách 2: Đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-1) \cdot 1 + (t+1) \cdot 1 + (2t-3) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Vậy H}(2; 3; 3)$$

Câu V. (Đại học: 2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, xét ΔABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC .

Phương trình đường (AB): $y = 0$. Tọa độ điểm B $\begin{cases} (AB): y = 0 \\ (BC): \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x_B = 1; y_B = 0 \Rightarrow B(1; 0). \text{ Gọi tọa độ điểm A là } (a; 0) \Rightarrow C(a; \sqrt{3}a - \sqrt{3})$$

$$\text{Sử dụng công thức } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow G\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}}{3}\right)$$

Cách 1:

$$\text{Ta có: } AB = |a-1|, AC = \sqrt{3}|a-1|, BC = 2|a-1|, S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{3}(a-1)^2}{2}$$

$$\text{Khi đó } r = \frac{2S}{P} = \frac{\sqrt{3} \cdot (a-1)^2}{(3+\sqrt{3}) \cdot |a-1|} = \frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow |a-1| = 2 \cdot (\sqrt{3}+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + 2\sqrt{3} \\ a = -1 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = \left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}, \frac{6+\sqrt{3}}{3}\right) \\ G = \left(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3}, \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$$

Cách 2:

Gọi $I(x_I, y_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

$$\text{Do } r=2 \Rightarrow y_I = \pm 2 \quad (1)$$

Phương trình đường (BC): $y = \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \widehat{CBA} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \widehat{IBA} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình (BI): } y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (x-1) = \frac{x-1}{\sqrt{3}} \quad (2). \text{ Từ (1), (2)} \Rightarrow x_I = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

TH 1: A và O khác phía đối với B. (Hình vẽ trên). Khi đó $x_I = 1 + 2\sqrt{3}$,

$$x_A = a = x_I + r \cdot \cotg \widehat{IAB} = (1 + 2\sqrt{3}) + 2 \cdot \cotg \frac{\pi}{4} = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow G = \left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}, \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \right)$$

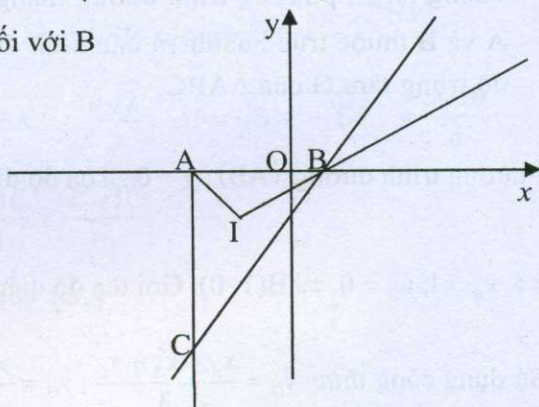
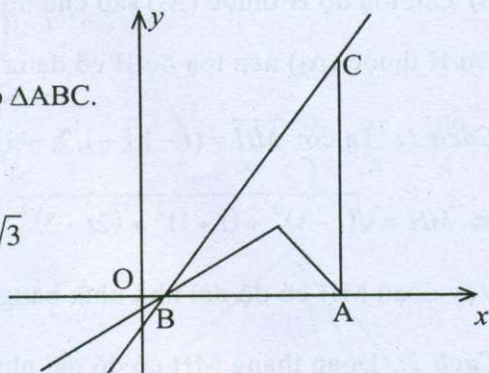
Trường hợp 2: A và O cùng phía đối với B

$$\text{Khi đó } x_I = 1 + 2\sqrt{3},$$

$$x_A = a = x_I + r \cdot \cotg \widehat{IAB} =$$

$$= (1 + 2\sqrt{3}) + 2 \cdot \cotg \frac{\pi}{4} = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow G = \left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}, \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \right)$$



2. Cho khai triển nhị thức sau với n là số nguyên dương

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}} \right)^n = C_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}} \right)^n + C_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}} \right)^{n-1} \left(2^{\frac{-x}{3}} \right) + \dots + C_n^{n-1} \left(2^{\frac{x-1}{2}} \right) \left(2^{\frac{-x}{3}} \right)^{n-1} + C_n^n \left(2^{\frac{-x}{3}} \right)^n$$

Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5 \cdot C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$, tìm n và x .

$$\bullet \text{ Từ } C_n^3 = 5 \cdot C_n^1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{n!}{3!(n-3)!} = 5 \cdot \frac{n!}{(n-1)!} \\ n \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-1)(n-2) = 5 \cdot 3! \\ n \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 3n - 28 = 0 \\ n \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7. \text{ Khi đó số hạng thứ tư là } C_n^3 \cdot \left(2^{\frac{x-1}{2}} \right) \cdot \left(2^{\frac{-x}{3}} \right)^2$$

$$= 35 \cdot 2^{x-2} = 20n = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x-2=2 \Leftrightarrow x=4. \text{ Đáp số } n=7; x=4$$

ĐỀ SỐ 2: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002 (KHỐI B)

Câu I. (Đại học 2,0 điểm; Cao đẳng 2,5 điểm)

Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu II. (Đại học 3.0 điểm; Cao đẳng 3 điểm)

1. Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

2. Giải bất phương trình $\log_x [\log_3 (9^x - 72)] \leq 1$

3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

Câu III. (Đại học 1.0 điểm; Cao đẳng 1,5 điểm)

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

Câu IV. (Đại học 3.0 điểm; Cao đẳng 3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I(\frac{1}{2}; 0)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

2. Cho hình lập phương ABCDA₁B₁C₁D₁ có cạnh bằng a .

a) Tính theo a khoảng cách giữa các đường thẳng A₁B và B₁D.

b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh bên BB₁, CD, A₁D₁.

Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C₁N.

Câu V. (Đại học 1.0 điểm)

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O, R) . Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Tìm n .

Câu I. (Đại học 2.0 điểm)

Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (m là tham số)

1. Khảo sát khi $m = 1$: $y = x^4 - 8x^2 + 10$

Do $y(x) = y(-x)$ nên hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 10$ là hàm chẵn.

$\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua Oy

Tập xác định: $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2); \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y(x_1) = -6 \\ y_2 = y(x_2) = 10 \\ y_3 = y(x_3) = -6 \end{cases}$$

$$\text{Đạo hàm bậc 2: } y'' = 12x^2 - 16 = 12\left(x^2 - \frac{4}{3}\right); \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow y\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{10}{9}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y''			$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			CĐ			$+\infty$

$\swarrow$ CT₁ $\nearrow$ CT₂

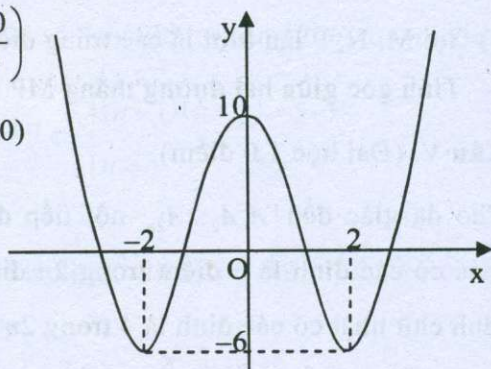
Đồ thị: Các điểm đặc biệt CT₁ $(-2; -6)$, CT₂ $(2; -6)$, CĐ $(0; 10)$.

Điểm uốn $U_1\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{10}{9}\right)$, $U_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{10}{9}\right)$

Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (0; 10)$

Giao với Ox: $y = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{4 + \sqrt{6}} \\ x = \pm \sqrt{4 - \sqrt{6}} \end{cases}$$



2. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Đạo hàm: $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x(2mx^2 + m^2 - 9)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 2mx^2 + m^2 - 9 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = -8m(m^2 - 9) > 0 \\ g(0) = -9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases}$$

Câu II. (Đại học 3.0 điểm)

1. Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 6x}{2} - \frac{1 + \cos 8x}{2} = \frac{1 - \cos 10x}{2} - \frac{1 + \cos 12x}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\cos 6x + \cos 8x}{2} = -\frac{\cos 10x + \cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 8x + \cos 6x) - (\cos 12x + \cos 10x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 7x \cdot \cos x - 2\cos 11x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos 7x - \cos 11x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot \sin 2x \sin 9x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \sin 9x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{9} \end{cases}$$

2. Giải bất phương trình $\log_x [\log_3 (9^x - 72)] \leq 1$

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \log_x [\log_3 (9^x - 72)] \leq \log_x x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_3 (9^x - 72) \leq x \\ 0 < x < 1 \\ \log_3 (9^x - 72) \geq x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 0 < 9^x - 72 \leq 3^x \\ 0 < x < 1 \\ 9^x - 72 \geq 3^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1; x > \log_9 72 \\ 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \\ x < 1; x > \log_9 72 \\ 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_9 72 \\ 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_9 72 \\ (3^x - 9)(3^x + 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_9 72 \\ 3^x - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_9 72 \\ 3^x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \log_9 72 < x \leq 2$$

3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = x - y \geq 0 \\ v = x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$, khi đó hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{u} = \sqrt{u} \\ v^2 - 2 = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{u}(1 - \sqrt{u}) = 0 \\ v^2 - v - 2 = 0 \end{cases}$

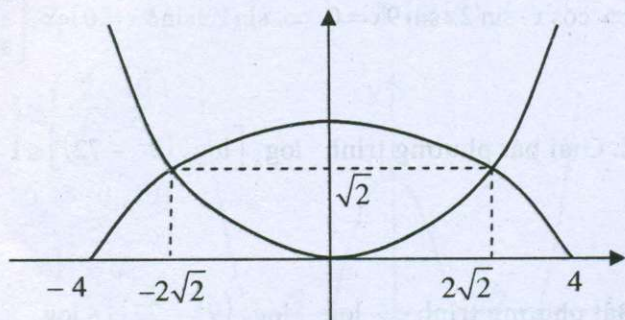
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{u} = 0 \\ \sqrt[3]{u} = 1 \\ (v+1)(v-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \\ u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ (x, y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Câu III. (Đại học 1.0 điểm)

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

Giao điểm:
$$\begin{cases} y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \\ y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$



$$\Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 128 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 8)(x^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

$$\text{Do } x^4 + 8x^2 - 128 \leq 0 \quad \forall x \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}] \Rightarrow \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \geq \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \quad \forall x \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$$

$$\text{nên } S = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx = 2 \left(\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} dx - \int_0^{\sqrt{8}} \frac{x^2}{4\sqrt{2}} dx \right)$$

$$S_1 = \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} dx \stackrel{x=4\cos t}{=} 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = (4t + 2 \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi + 2$$

$$S_2 = \int_0^{\sqrt{8}} \frac{x^2}{4\sqrt{2}} dx = \frac{x^3}{12\sqrt{2}} \Big|_0^{\sqrt{8}} = \frac{4}{3} \Rightarrow S = 2(S_1 - S_2) = 2\pi + \frac{4}{3}$$

Câu IV. (Đại học 3.0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

Khoảng cách từ $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ đến (AB) là:

$$d = \frac{\left| \frac{1}{2} - 2 \cdot 0 + 2 \right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

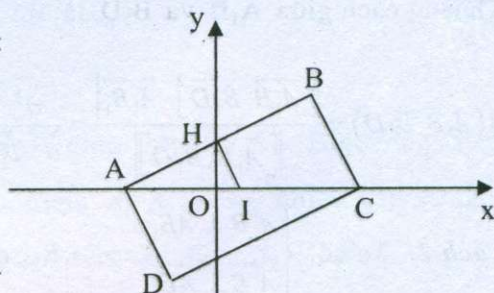
$$\Rightarrow AD = 2d = \sqrt{5} \Rightarrow AB = 2AD = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5 \Rightarrow IA = IB = IC = ID = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\Rightarrow A, B, C, D \text{ nằm trên đường tròn tâm } I \text{ bán kính } \frac{5}{2}.$$

$$\Rightarrow \text{Toạ độ A, B là } \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 2y - \frac{5}{2} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1; y_1) = (-2; 0) \\ (x_2; y_2) = (2; 2) \end{cases}$$

Do đỉnh A có hoành độ âm nên ta được $A(-2; 0)$, $B(2; 2)$



$$\text{Do } I \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow \text{Tọa độ } C \text{ là } \begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 3 \\ y_C = 2y_I - y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3; 0)$$

$$\text{Do } I \text{ là trung điểm của } BD \Rightarrow \text{Tọa độ } D \text{ là } \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = -1 \\ y_D = 2y_I - y_B = -2 \end{cases} \Rightarrow D(-1; -2)$$

2. Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ có cạnh bằng a .

a) Tính theo a khoảng cách giữa các đường thẳng $A_1 B$ và $B_1 D$.

Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ với

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A_1(0; 0; a)$$

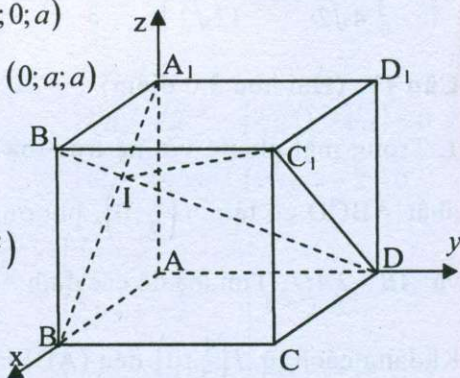
$$\Rightarrow C(a; a; 0), B_1(a; 0; a), C_1(a; a; a), D_1(0; a; a)$$

$$\overrightarrow{A_1 B} = (a; 0; -a), \overrightarrow{B_1 D} = (-a; a; -a)$$

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = (a; 0; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{A_1 B}, \overrightarrow{B_1 D}] = (a^2; 2a^2; a^2)$$

Khoảng cách giữa $A_1 B$ và $B_1 D$ là:

$$d(A_1 B, B_1 D) = \frac{|\overrightarrow{A_1 B} \cdot \overrightarrow{B_1 D}|}{|\overrightarrow{A_1 B} \times \overrightarrow{B_1 D}|} = \frac{a^3}{a^2 \sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$



Cách 2: Ta có: $\begin{cases} A_1 B \perp AB_1 \\ A_1 B \perp AD \end{cases} \Rightarrow A_1 B \perp mp(AB_1 C_1 D) \Rightarrow A_1 B \perp B_1 D \quad (1)$

Tương tự ta được $A_1 C_1 \perp B_1 D \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $B_1 D \perp mp(A_1 B C_1)$

Gọi $B_1 D \cap mp(A_1 B C_1) \equiv G$. Do $B_1 A_1 = B_1 B = B_1 C_1 = a \Rightarrow GA_1 = GB = GC_1$

$\Rightarrow G$ là tâm $\Delta A_1 B C_1$ đều. Gọi I là trung điểm $A_1 B$

$\Rightarrow IG$ là đường vuông góc chung của $(A_1 B)$ và $(B_1 D)$

$$\Rightarrow d(A_1 B, B_1 D) = IG = \frac{C_1 I}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_1 B \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh bên BB_1 , CD , A_1D_1 .

Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N .

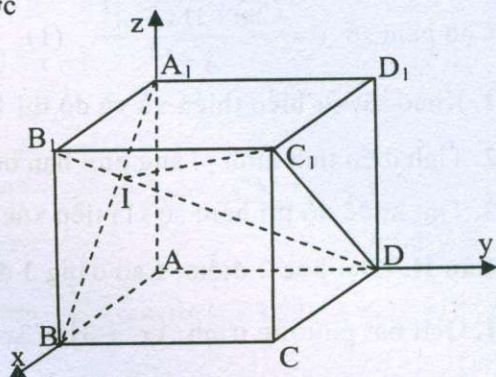
Cách 1: Theo Cách 1 câu 2a) ta được

$$M\left(a; 0; \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right), P\left(0; \frac{a}{2}; a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{NC_1} = \left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NC_1} = -a \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot 0 + \frac{a}{2} \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow MP \perp NC_1$$



Cách 2: Gọi E là trung điểm $CC_1 \Rightarrow ME \perp mp(CDD_1C_1)$

$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của MP trên $mp(CDD_1C_1)$ là ED_1 .

$$\text{Ta có: } \triangle C_1CN = \triangle D_1C_1E \Rightarrow \widehat{C_1D_1E} = \widehat{CC_1N} = \frac{\pi}{2} - \widehat{D_1C_1N} \Rightarrow D_1E \perp C_1N$$

Theo định lí 3 đường vuông góc $\Rightarrow MP \perp C_1N$

Câu V. (Đại học 1.0 điểm)

Cho đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O, R) . Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Tìm n .

+ Số tam giác có 3 đỉnh trong $2n$ điểm $A_1A_2 \dots A_{2n}$ là C_{2n}^3

+ Số đường chéo đi qua tâm O của đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{2n}$ là n .

+ Số hình chữ nhật là số cách chọn bộ 2 đường chéo khác nhau là C_n^2

$$\text{Theo giả thiết ta có: } C_{2n}^3 = 20 \cdot C_n^2 \Leftrightarrow \frac{2n!}{3!(2n-3)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n-1=15 \\ n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow n=8$$

ĐỀ SỐ 3: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002 (KHỎI D)

Câu I. (Đại học 3 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$ (1) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) ứng với $m = -1$.
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và hai trục tọa độ.
3. Tìm m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

Câu II. (Đại học 2 điểm, Cao đẳng 3 điểm)

1. Giải bất phương trình $(x^2 - 3) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$

Câu III. (Đại học 1 điểm, Cao đẳng 1 điểm)

Tìm x thuộc đoạn $[0; 14]$ nghiệm đúng bất phương trình:

$$\cos 3x - 4 \cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0$$

Câu IV. (Đại học 2 điểm, Cao đẳng 2 điểm)

1. Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với $mp(ABC)$, $AC = AD = 4cm$, $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Tính khoảng cách từ điểm A tới $mp(BCD)$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng

$$(P): 2x - y + 2 = 0 \text{ và đường thẳng } d_m: \begin{cases} (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)y + 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

Câu V. (Đại học 2 điểm)

1. Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$

2. Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ của M, N để độ đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất.

ĐÁP ÁN

Câu 1. 1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m = -1$: $y = \frac{-3x-1}{x-1}$

TXĐ: $x \neq 1$. Đạo hàm: $y' = \frac{4}{(x-1)^2} > 0 \quad \forall x \neq 1$

Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow$ TCN $y = -3$

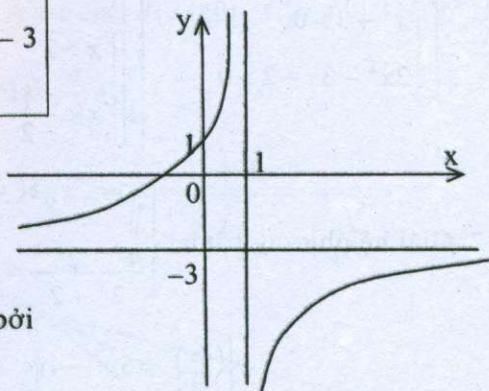
$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3x-1}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3x-1}{x-1} = +\infty \Rightarrow$ TCD $x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	$-3 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow -3$

Đồ thị: Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$



2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và hai trục tọa độ.

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{3x-1}{x-1} dx = \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(-3 - \frac{4}{x-1} \right) dx = -3 \int_{-\frac{1}{3}}^0 dx - 4 \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= \left(-3x - 4 \ln|x-1| \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^0 = 1 + 4 \ln \frac{4}{3}$$

3. Tìm m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

$$Y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1} = x \\ f'(x) = (x)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x^2 + 2mx - m^2}{x-1} = 0 \\ \frac{1-2m+m^2}{(x-1)^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-m)^2}{x-1} = 0 \\ \frac{(x-1)^2 - (m-1)^2}{(x-1)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-m)^2}{x-1} = 0 \\ \frac{(x-m)(x+m-2)}{(x-1)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (I)$$

Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow m \neq 1$.

Câu II. (Đại học 2 điểm)

$$1. \text{ BPT: } (x^2 - 3) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \\ (x^2 - 3) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ \begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \\ x = -\sqrt{3} \\ \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \\ x = -\sqrt{3} \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < -\sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x \leq -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$$

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x)^3 = 5y^2 - 4y \\ y = \frac{(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x}{2^x + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x)^3 = 5y^2 - 4y \\ y = \frac{2^x(2^x + 2)}{2^x + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x)^3 - 5y^2 + 4y = 0 \\ y = 2^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 5y^2 + 4y = 0 \\ x = \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y-1)(y-4) = 0 \\ x = \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 4 \\ x = \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (0; 1) \\ (x; y) = (2; 4) \end{cases}$$

Câu III. (Đại học 1 điểm)

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \cos 3x + 3 \cos x - 4(\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 4 \cdot 2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x (\cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có: $x \in [0; 14] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 14 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{14}{\pi} - \frac{1}{2} < 4 \Leftrightarrow k = \{0; 1; 2; 3\}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right\}$

Câu IV. (Đại học 2 điểm)

1. Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với $mp(ABC)$, $AC = AD = 4cm$,
 $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Tính khoảng cách từ điểm A tới $mp(BCD)$.

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A $\Leftrightarrow AB \perp AC$

Do $AD \perp mp(ABC) \Rightarrow AD \perp AB$, $AD \perp AC$.

Cách 1:

Lập hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc gốc A sao cho $B(3; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $D(0; 0; 4)$

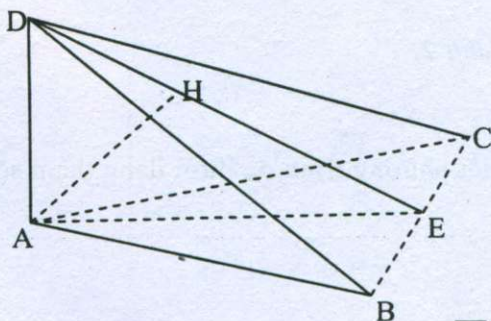
Khi đó mặt phẳng (BCD) có phương trình $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} - 1 = 0$

Khoảng cách từ điểm A tới $mp(BCD)$ là: $d = \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$

Cách 2:

Dựng đường cao AE trong $\triangle ABC$ và đường cao AH trong $\triangle ADE$.

Khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).



Ta có:
$$\begin{cases} \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} \\ \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{34}}{17}$$

Cách 3:

Ta có: $AE = \frac{AC \cdot AB}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 4^2} = \frac{4\sqrt{34}}{5}$

$$\Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{DE \cdot BC}{2} = \frac{\frac{4\sqrt{34}}{5} \cdot 5}{2} = 2\sqrt{34}. \text{ Lại có: } V_{ABCD} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{6} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 4}{6} = 8$$

$$\text{Mà } V_{ABCD} = \frac{AH \cdot S_{\Delta BCD}}{3} \Rightarrow AH = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{3 \cdot 8}{2\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$$

2. Trong không gian với hệ toạ độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng

$$(P): 2x - y + 2 = 0 \text{ và đường thẳng } d_m: \begin{cases} (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)y + 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

Cách 1: Vector pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n} = (2; -1; 0)$

$$\text{Vector chỉ phương của đường thẳng } d_m: \vec{u} = [(1-m)(2m+1); -(2m+1)^2; -m(1-m)]$$

$$\text{Ta có: } \vec{n} \cdot \vec{u} = 3(2m+1)$$

$$\text{Vậy } d_m \text{ song song với (P)} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 3(2m+1) = 0 \\ \exists A \in d_m; A \notin (P) \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Khi } m = -\frac{1}{2} \text{ phương trình } d_m: \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall A(0; 1; a) \in d_m \text{ đều } \notin (P)$$

$$\text{Đáp số: } m = -\frac{1}{2}$$

Cách 2:

$$\text{Viết phương trình } d_m \text{ dưới dạng tham số: } \begin{cases} x = (1-m)(2m+1)t \\ y = 1 - (2m+1)^2 t \\ z = -2 - m(1-m)t \end{cases}$$

$$\text{Vậy } d_m \text{ song song với (P)} \Leftrightarrow \text{Hệ phương trình } \begin{cases} x = (1-m)(2m+1)t \\ y = 1 - (2m+1)^2 t \\ z = -2 - m(1-m)t \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình } 3(2m+1)t + 1 = 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow 2m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Câu V. (Đại học 2 điểm)

1. Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$

Xét triển khai nhị thức $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$. Thay $x = 1$ ta được: $3^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k$

Theo bài ra ta có: $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 243 \Rightarrow 3^n = 243 \Leftrightarrow n = 5$.

2. Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ của M, N để độ đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất.

Đặt tọa độ $M(m;0)$, $N(0;n)$. Khi đó phương trình (MN): $\frac{x}{m} - \frac{y}{n} - 1 = 0$

Đường thẳng (MN) tiếp xúc với (E) $\Leftrightarrow \frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} = 1$

Khi đó ta có: $MN = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{(m^2 + n^2) \left(\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} \right)} =$

$$= \sqrt{25 + \left(\frac{16n^2}{m^2} + \frac{9m^2}{n^2} \right)} \geq \sqrt{25 + 2\sqrt{16 \cdot 9}} = \sqrt{49} = 7$$

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN là 7

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16n^2}{m^2} = \frac{9m^2}{n^2} \\ m^2 + n^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 28 \\ n^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{7}; n = \sqrt{21} \\ m = -2\sqrt{7}; n = \sqrt{21} \\ m = -2\sqrt{7}; n = -\sqrt{21} \\ m = 2\sqrt{7}; n = -\sqrt{21} \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ M, N là} \begin{cases} M(2\sqrt{7};0), N(0;\sqrt{21}) \\ M(-2\sqrt{7};0), N(0;\sqrt{21}) \\ M(-2\sqrt{7};0), N(0;-\sqrt{21}) \\ M(2\sqrt{7};0), N(0;-\sqrt{21}) \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 4: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2003 (KHỐI A)**Câu I. (Đại học 2 điểm)**

Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = -1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt và 2 điểm phân biệt đó có hoành độ dương.

Câu II. (Đại học 2 điểm)

1. Giải phương trình $\cot gx - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

Câu III. (Đại học 3 điểm)

1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính số đo của góc nhị diện $[B, A'C, D]$
2. Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hình chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc của hệ tọa độ, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$ ($a > 0, b > 0$). Gọi M là trung điểm của cạnh CC'.

a) Tính thể tích khối tứ diện BDA'M theo a và b .

b) Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

Câu IV. (Đại học 2 điểm)

1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$ (n là số nguyên dương, $x > 0$)

2. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$

Câu V. (Đại học 1 điểm)

Cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (Đại học 2 điểm)

1. Với $m = -1$: $y = \frac{-x^2 + x - 1}{x - 1}$. **TXĐ**: $x \neq 1$

Đạo hàm: $y' = \frac{-x(x-2)}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y(x_1) = 1 \\ y_2 = y(x_2) = -3 \end{cases}$

Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow \infty} [y - (-x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2 + x - 1}{x - 1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x - 1} = 0 \Rightarrow$ **TCX**: $y = -x$

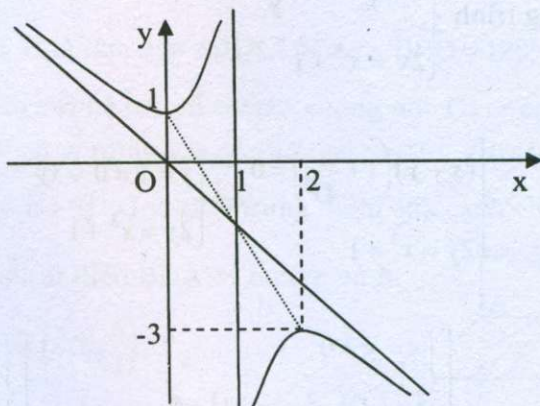
$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-x - \frac{1}{x - 1} \right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-x - \frac{1}{x - 1} \right) = +\infty \Rightarrow$ **TCĐ**: $x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		- 0 +		+ 0 -	
y	$+\infty$		+		$-\infty$

Đồ thị:

Các điểm đặc biệt CT(0;1), CĐ(2;-3) Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0; 1)$



2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ dương

Xét hệ phương trình tương giao $\begin{cases} y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = mx^2 + x + m = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 1 - 4m^2 > 0 \\ f(1) = 1 + 2m \neq 0 \\ S = -\frac{1}{m} > 0; P = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{1}{2} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

Câu II. (Đại học 2 điểm)

1. Giải phương trình $\cotg x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tg x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = (\cos x - \sin x) \cos x + \sin^2 x - \sin x \cos x \\ \cos x + \sin x \neq 0; \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x - \sin x)(1 - \cos x \sin x + \sin^2 x) = 0 \\ \cos x + \sin x \neq 0; \cos x \neq 0; \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x - \sin x)(3 - \sin 2x - \cos 2x) = 0 \\ \cos x + \sin x \neq 0; \cos x \neq 0; \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x \neq 0; \cos x \neq 0; \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tg x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \vee xy = -1 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \\ 2y = x^3 + 1 \\ xy = -1 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \\ x^3 - 2x + 1 = 0 \\ xy = -1 \\ x^4 + x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \\ (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \\ xy = -1 \\ \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ xy = -1 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 1 \vee x = y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Câu III. (Đại học 3 điểm)

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo của góc nhị diện $[B, A'C, D]$

Đặt $AB = a$. Ta có: $BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp A'C$ (1)

H là hình chiếu vuông góc của B trên $A'C$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} BH \perp A'C \\ (1) \end{cases} \Rightarrow A'C \perp (BHD) \Rightarrow DH \perp A'C$$

Vậy góc phẳng nhị diện $[B, A'C, D]$ là $\widehat{BHD}$

Cách 1:

$$\text{Ta có: } 2S_{\Delta A'DC} = DH \cdot A'C = A'D \cdot DC \Rightarrow DH = \frac{A'D \cdot DC}{A'C} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$2S_{\Delta A'BC} = BH \cdot A'C = A'B \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{A'B \cdot BC}{A'C} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{BHD} = \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2 \cdot BH \cdot DH} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ$$

Cách 2: Ta có: $\Delta HA'B = \Delta HA'D = \Delta HA'C' \Rightarrow HB = HD = HC'$.

Mà $H \in (BDC') \Rightarrow H$ là tâm của $\Delta BDC'$ đều $\Rightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ$

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hình chữ nhật

$ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc của hệ tọa độ, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$,

$A'(0; 0; b)$ ($a > 0, b > 0$). Gọi M là trung điểm của cạnh CC' .

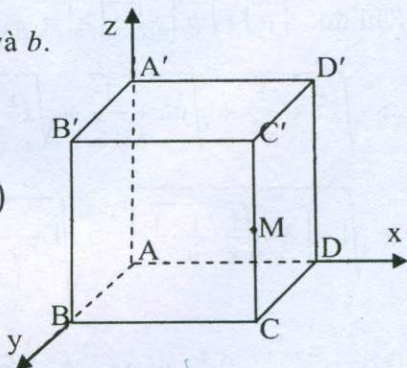
a) Tính thể tích khối tứ diện $BDA'M$ theo a và b .

Tọa độ điểm M là $M\left(a; a; \frac{b}{2}\right)$

$$\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0), \overrightarrow{BM} = \left(0; a; \frac{b}{2}\right), \overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b)$$

$$V_{BDA'M} = \frac{1}{6} \cdot \left| [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] \cdot \overrightarrow{BA'} \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2 \right) \cdot (-a; 0; b) \right| = \frac{-3a^2b}{2}$$



b) Vector pháp tuyến của mặt phẳng (BDM) là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{b}{2}; \frac{b}{2}; -a\right)$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (A'BD) là $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (b; b; a)$

$$\text{Vậy } (A'BD) \perp (MBD) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$$

Câu IV. (Đại học 2 điểm)

$$1. \text{ Ta có: } C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow (C_{n+3}^{n+1} + C_{n+3}^n) - C_{n+3}^n = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1} = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{2} = 7(n+3) \Leftrightarrow n+2 = 14 \Leftrightarrow n = 12.$$

$$\text{Số hạng tổng quát là } C_{12}^k \cdot (x^{-3})^k \cdot (x^{\frac{5}{2}})^{12-k} = C_{12}^k \cdot x^{\frac{60-11k}{2}}$$

$$\text{Số hạng ứng với } x^8 \text{ tương ứng với giá trị } k \text{ thoả mãn } \frac{60-11k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 4$$

Hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_{12}^4 = 495$

$$2. \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 4} \\ dx = \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - 4}} \end{cases} \text{ với } \begin{cases} x = \sqrt{5} \text{ thì } t = 3 \\ x = 2\sqrt{3} \text{ thì } t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có: } I = \int_3^4 \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \left(\int_3^4 \frac{dt}{t-2} - \int_3^4 \frac{dt}{t+2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$$

Câu V. Cách 1: Đặt $\vec{a} = \left(x, \frac{1}{x}\right)$; $\vec{b} = \left(y, \frac{1}{y}\right)$; $\vec{c} = \left(z, \frac{1}{z}\right)$

$$\text{Khi đó: } |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}$$

$$\geq \sqrt{1 + \left(3 \cdot \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}}\right)^2} \geq \sqrt{1 + \frac{9}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2}} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$$

Với $x = y = z = \frac{1}{3}$ thì $\text{Min } S = \sqrt{82}$

ĐỀ SỐ 5: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2003 (KHỐI B)**Câu I. (2 điểm)**

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1)

1. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc toạ độ.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 2$: $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình $\cot g x - t g x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy cho ΔABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm ΔABC .

Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

2. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'C'B'D'$ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC' . Chứng minh rằng 4 điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

3. Trong không gian với hệ toạ độ Đêcac vuông góc Oxyz cho 2 điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 8)$ và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$.

Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$
2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$

Câu V. (1 điểm)

Cho n là số nguyên dương. Tính tổng $C_n^0 + \frac{2^2 - 1}{2} C_n^1 + \frac{2^3 - 1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} C_n^n$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2 điểm)

1. Đặt tọa độ 2 điểm phân biệt là $(x_0; y_0)$ và $(-x_0; -y_0)$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + m \\ -y_0 = -x_0^3 - 3x_0^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + m \\ y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + m \\ m = 3x_0^2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \text{ cần thỏa mãn } \begin{cases} m = 3x_0^2 \geq 0 \\ (x_0; y_0) \neq (-x_0; -y_0) \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

2. Tập xác định: $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Đạo hàm: } y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2); \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y(x_1) = 2 \\ y_2 = y(x_2) = -2 \end{cases}$$

$$\text{Đạo hàm bậc 2: } y'' = 6x - 6 = 6(x - 1); \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(x_0) = 0$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y''			-	0	+	
y	$-\infty$	↗ CĐ ↘		↘ CT ↗		$+\infty$

Đồ thị: Các điểm đặc biệt CT(2; -2), CĐ(0; 2), Điểm uốn U(1; 0)

Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0; 2)$

Giao với Ox: $y = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

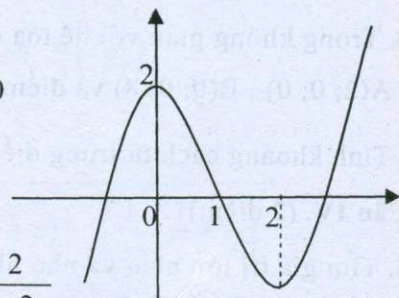
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow (1; 0), (1 \pm \sqrt{3}; 0)$$

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình $\cotg x - \operatorname{tg} x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\frac{\sin 2x}{2}} + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{2 \cos 2x + 4 \sin^2 2x}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos 2x + 4 \sin^2 2x = 2 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos 2x + 4(1 - \cos^2 2x) = 2 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$$

$$2. \text{ Hệ PT } \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \\ xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \\ 3x^2y - 3xy^2 = y^2 - x^2 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \\ (x - y)(3xy + x + y) = 0 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^3 - x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho ΔABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm ΔABC .

Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} = 3 \cdot \overrightarrow{MG} \Leftrightarrow (x_A - 1; y_A + 1) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0; 2)$$

Do $BC \perp MA$ nên đường thẳng BC có vector pháp tuyến song song với vector chỉ phương của đường

thẳng MA : $\overrightarrow{n_{BC}} = \overrightarrow{u_{MA}} = (-1; 3)$. Đường BC đi qua $M(1; -1)$ có phương trình là:

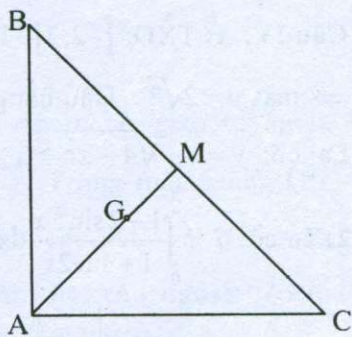
$$-1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y + 1) = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 4 = 0 \quad (1)$$

Do $MB = MC = MA = \sqrt{10}$ nên tọa độ B, C thuộc đường tròn:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \quad (2)$$

$$\text{Tọa độ } B \text{ và } C \text{ là giao của (1) và (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 4 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4; y_1 = 0 \\ x_2 = -2; y_2 = -2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ A, B, C lần lượt là $(0; 2), (4; 0), (-2; -2)$ hoặc $(0; 2), (-2; -2), (4; 0)$



2. Ta có: $\begin{cases} A'M \parallel NC \\ A'M = NC \end{cases} \Rightarrow A'MCN \text{ là hình bình hành}$

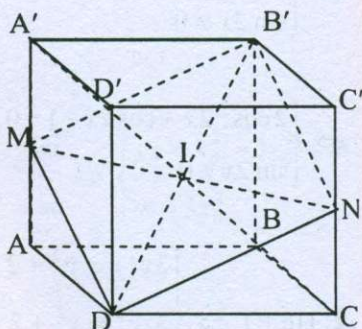
$\Rightarrow A'C \cap MN \equiv I$ là trung điểm của $A'C$ và MN (1)

Lại có: $\begin{cases} A'B' \parallel DC \\ A'B' = DC \end{cases} \Rightarrow A'DCB' \text{ là hình bình hành}$

$\Rightarrow A'C \cap DB' \equiv I$ là trung điểm của $A'C$ và DB' (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MDNB'$ là hình hình hành.

$\Rightarrow M, D, N, B'$ cùng thuộc một mặt phẳng.



3. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (2; 0; 0) \\ A(2; 0; 0) \end{cases} \Rightarrow C(2; 6; 0)$. Lại có: $\begin{cases} B(0; 0; 8) \\ C(2; 6; 0) \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ } I: (1; 3; 4)$

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $I(1; 3; 4)$ và vuông góc với $\overrightarrow{OA} = (2; 0; 0)$ là:

$$2 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-3) + 0 \cdot (z-4) = 0 \Leftrightarrow x-1=0$$

Phương trình đường thẳng OA là: $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Toạ độ giao điểm E của mặt phẳng (α) với đường thẳng OA là: $(1; 0; 0)$

Khoảng cách từ I đến đường thẳng BC là $IE = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2 + (0-4)^2} = 5$

Câu IV. 1. TXĐ: $[-2; 2]$. Ta có: $y \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)} \left[x^2 + (\sqrt{4-x^2})^2 \right] = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max y = 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Lại có: $y = x + \sqrt{4-x^2} \geq x \geq -2 \Rightarrow \min y = -2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = -2$

2. Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} dx$. Đặt $t = 1 + \sin 2x$

$\Rightarrow dt = 2 \cos 2x dx$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 2 \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_1^2 \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_1^2 = \frac{\ln 2}{2}$

Câu V. Xét khai triển nhị thức $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 \dots + C_n^n \cdot x^n$

Suy ra: $\int_1^2 (C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 \dots + C_n^n \cdot x^n) dx = \int_1^2 (1+x)^n dx$

$$\Leftrightarrow \left(C_n^0 \cdot \frac{x}{1} + C_n^1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_n^2 \cdot \frac{x^3}{3} + \dots + C_n^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_1^2 = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow C_n^0 + \frac{2^2-1}{2} C_n^1 + \frac{2^3-1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$$

ĐỀ SỐ 6: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2003 (KHỐI D)**Câu I. (2 điểm)**

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ (1)
2. Tìm m để đường thẳng $d_m: y = mx + 2 - 2m$ cắt đồ thị của hàm số (1) tại 2 điểm phân biệt.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \lg^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$
2. Giải phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng $(d): x - y - 1 = 0$

Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường (d) .

Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C') .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho đường thẳng

$$(d_k): \begin{cases} x + 3ky - z + 2 = 0 \\ kx - y + z + 1 = 0 \end{cases}. \text{ Tìm } k \text{ để } (d_k) \perp mp(P): x - y - 2z + 5 = 0$$

3. Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ . Trên Δ lấy 2 điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC và BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a .

Câu IV. (2 điểm)

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$
2. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 - x| dx$

Câu V. (1 điểm)

Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$

ĐÁP ÁN

Câu 1. 1. Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y(x_1) = -2 \\ y_2 = y(x_2) = 6 \end{cases}$

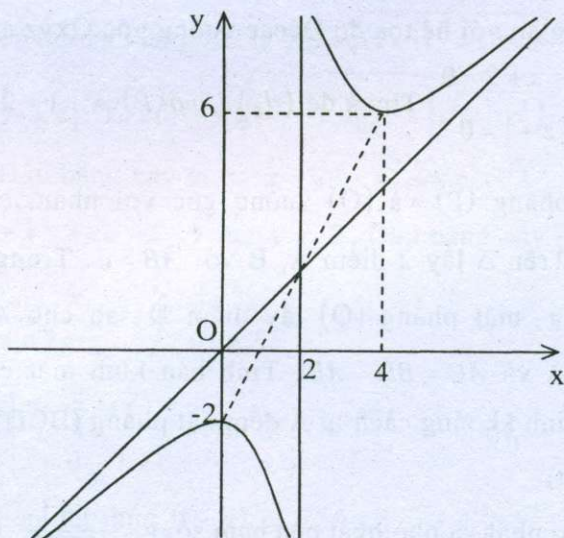
Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận xiên của đồ thị là $y = x$

$\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x + \frac{4}{x-2} \right) = \infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng của đồ thị là $x = 2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$			
y'		+	0	-		-	0	+		
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị: Các điểm đặc biệt: $ĐĐ(0; -2)$, $CT(4; 6)$. Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = -2$



2. Xét giao của HS (1) và (d_m) : $\begin{cases} y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \\ y = mx + 2 - 2m \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = mx + 2 - 2m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 4 = (x - 2)(mx + 2 - 2m) \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)(x - 2)^2 = 4 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Điều kiện (d_m) cắt đồ thị (1) tại 2 điểm phân biệt là $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Câu II. 1. Điều kiện: $\cos x \neq 0$, khi đó phương trình tương đương:

$$\frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1 + \cos x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot \sin^2 x - (1 + \cos x) \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x) \cdot (1 - \cos^2 x) - (1 + \cos x)(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x) \cdot (1 - \cos x)(1 + \cos x) - (1 + \cos x)(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \cos x)[(1 - \cos x) - (1 + \sin x)] = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin x = 0 \\ 1 + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ (loại)} \\ x = \pi + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

2. Giải phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$ (*)

$$\text{Đặt } t = 2^{x^2-x} > 0, \text{ khi đó (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} t - \frac{4}{t} = 3 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t - 4 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -1 \\ t > 0 \end{cases}$$

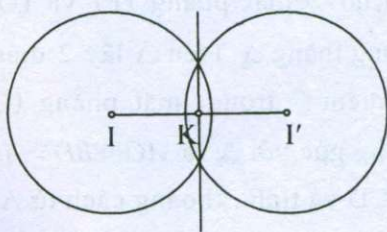
$$\Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu III. (3 điểm)

1. Vector pháp tuyến của (d): $x - y - 1 = 0$ là $\vec{n} = (1; -1)$

Đường thẳng (ζ) đi qua tâm I(1; 2) của đường tròn (C) và vuông góc với (d) có phương trình là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow x + y - 3 = 0.$$



$$\text{Toạ độ giao điểm K của (d) và } (\zeta): \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow K(2; 1)$$

$$\text{Do } I' \text{ và I đối xứng nhau qua K nên toạ độ I: } \begin{cases} x_{I'} = 2 \cdot x_K - x_I \\ y_{I'} = 2 \cdot y_K - y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = 3 \\ y_{I'} = 0 \end{cases} \Rightarrow I'(3; 0)$$

Phương trình đường tròn (C'): $(x - 3)^2 + y^2 = 4$

• Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C').

Giao điểm của (C) và (C') chính là giao điểm của (C') và (d): $\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (x-1)^2 = 4 \\ y = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=0 \\ x=3; y=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (1;0)$ và $(3;2)$

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho đường thẳng

$$(d_k): \begin{cases} x + 3ky - z + 2 = 0 \\ kx - y + z + 1 = 0 \end{cases}. \text{ Tìm } k \text{ để } (d_k) \perp mp(P): x - y - 2z + 5 = 0$$

Đường thẳng (d_k) có cặp 2 vector pháp tuyến là $\begin{cases} \vec{n}_1 = (1; 3k; -1) \\ \vec{n}_2 = (k; -1; 1) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vector chỉ phương của $(d_k): \vec{u}_k = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (3k-1; -k-1; -3k^2-1)$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n} = (1; -1; -2)$

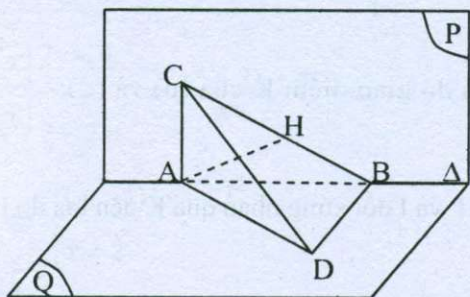
$$\text{Vậy } (d_k) \perp mp(P) \Leftrightarrow \vec{u}_k \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{3k-1}{1} = \frac{-k-1}{-1} = \frac{-3k^2-1}{-2} \Leftrightarrow k = 1.$$

3. Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ . Trên Δ lấy 2 điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC và BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CA \in (P) \\ CA \perp (\Delta) \\ (P) \perp (Q) \equiv (\Delta) \end{cases} \Rightarrow CA \perp (Q)$$

$\Rightarrow CA \perp AD \Rightarrow \triangle CAD$ vuông tại A.

Tương tự suy ra $\triangle DBC$ vuông tại B.



$\Rightarrow A, B, C, D$ thuộc mặt cầu đường kính $CD \Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp

$$ABCD \text{ là: } R = \frac{1}{2} \cdot CD = \frac{1}{2} \sqrt{BC^2 + BD^2} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + AC^2 + BD^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có: $\begin{cases} DB \in (Q) \\ DB \perp (\Delta) \\ (P) \perp (Q) \equiv (\Delta) \end{cases} \Rightarrow DB \perp (P). \text{ Gọi } H \text{ là trung điểm } BC, \text{ khi đó: } \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp DB \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (BCD). \text{ Vậy khoảng cách từ } A \text{ đến mặt phẳng } (BCD) \text{ là } AH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu IV. Đạo hàm: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = \sqrt{2}$

Bảng biến thiên:

x	-1	1	2	
y'		+	0	-
y			$\sqrt{2}$	
	0	$\nearrow$		$\searrow$
				$\frac{2}{\sqrt{5}}$

Vậy $\max_{[-1;2]} y = y(1) = \sqrt{2}, \min_{(-1;2)} y = y(-1) = 0$

2. $I = \int_0^1 x^2 - x |dx + \int_1^2 x^2 - x |dx = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1$

Câu V. (1 điểm) Xét hai khai triển nhị thức

$(x^2 + 1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot x^{2(n-i)}; (x+2)^n = \sum_{j=0}^n 2^j C_n^j \cdot x^{n-j}. \text{ Xét } i, j \text{ tương ứng hệ số } x^{3n-3},$

khi đó hệ số i, j thỏa mãn hệ thức: $2(n-i) + n - j = 3n - 3 \Leftrightarrow 2i + j = 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} i=0; j=3 \\ i=1; j=1 \end{cases}. \text{ Hệ số của } x^{3n-3} \text{ là } a_{3n-3} = C_n^0 \cdot 2^3 C_n^3 + C_n^1 \cdot 2^1 C_n^1 =$

$= \frac{2n(2n^2 - 3n + 4)}{3} = 26n \Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=5 \\ n=-\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow n=5.$

ĐỀ SỐ 7: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2004 (KHỐI A)

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)}$ (1)

1) Khảo sát hàm số (1).

2) Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 1$.

Câu II (2 điểm)

1) Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Câu III (3 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(0; 2) và B(3; 1).

Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; 2). Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N.

Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Câu IV (2 điểm)

1) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$

2) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1+x^2(1-x)]^8$

Câu V (1 điểm) Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện $\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3$. Tính ba góc của tam giác ABC.

ĐÁP ÁN

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)}$ (1)

1) Khảo sát hàm số (1): $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)} = -\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2(x-1)}$

a) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Sự biến thiên: $y' = \frac{x(2-x)}{2(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$

$$y_{\text{CD}} = y(2) = -\frac{1}{2}, y_{\text{CT}} = y(0) = \frac{3}{2}$$

Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

$y = -\frac{1}{2}x + 1$ là tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		- 0 +		+ 0 -	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$
		$\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$	
				$\nearrow$	$-\infty$
					$-\infty$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $y = m$ là:

$$y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)} = m \Leftrightarrow x^2 + (2m-3)x + 3-2m = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2} \text{ hoặc } m < -\frac{1}{2} \quad (**).$$

Với điều kiện (**), đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm A, B có hoành độ x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*).

$$AB = 1 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 - 4(3-2m) = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn (**))}$$

Câu II (2 điểm)

1) Điều kiện: $x \geq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với BPT:

$$\sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} > 10 - 2x$$

Nếu $x > 5$ thì bất phương trình được thoả mãn, vì vế trái dương, vế phải âm.

Nếu $4 \leq x \leq 5$ thì hai vế của bất phương trình không âm. Bình phương hai vế ta được: $2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 66 < 0 \Leftrightarrow 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34}$

Kết hợp với điều kiện $4 \leq x \leq 5$ ta có: $10 - \sqrt{34} < x \leq 5$

Kết luận: Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 10 - \sqrt{34}$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Điều kiện: $y > x$ và $y > 0$.

$$\log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow -\log_4(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow -\log_4 \frac{y-x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3y}{4}$$

Thế vào phương trình $x^2 + y^2 = 25$ ta có: $\left(\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 4$

So sánh với điều kiện, ta được $y = 4$, suy ra $x = 3$ (thoả mãn $y > x$).

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(3; 4)$

Câu III (3 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0; 2)$ và $B(3; 1)$.

Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.

+ Đường thẳng qua O, vuông góc với $\overrightarrow{BA}(\sqrt{3}; 3)$ có phương trình $\sqrt{3}x + 3y = 0$

Đường thẳng qua B, vuông góc với $\overrightarrow{OA}(0; 2)$ có phương trình $y = -1$

(Đường thẳng qua A, vuông góc với $\overrightarrow{BO}(\sqrt{3}; 1)$ có phương trình $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$

Giải hệ hai (trong 3) phương trình trên ta được trực tâm $H(\sqrt{3}; -1)$

+ Đường trung trực cạnh OA có phương trình $y = 1$.

Đường trung trực cạnh OB có phương trình $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$

Đường trung trực cạnh AB có phương trình $\sqrt{3}x + 3y = 0$

Giải hệ hai (trong 3) phương trình trên ta được tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $I(-\sqrt{3}; 1)$

2) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $S(0; 0; 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

+ Ta có: $C(-2; 0; 0)$, $D(0; -1; 0)$, $M(-1; 0; \sqrt{2})$,

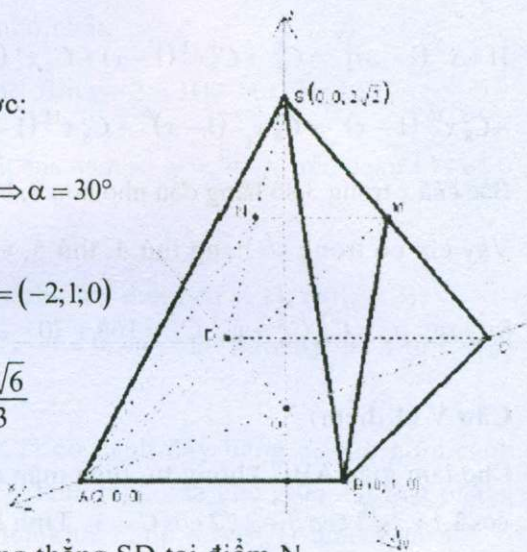
$$\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2}), \overrightarrow{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$$

Gọi α là góc giữa SA và BM. Ta được:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}) \right| = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{BM}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

+ Ta có: $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}] = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 0)$

$$\text{Vậy: } d(SA, BM) = \frac{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}] \cdot \overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}]|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$



b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N.

Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Ta có $MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow N$ là trung điểm SD $\Rightarrow N(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2})$

$$\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2}), \overrightarrow{SM} = (-1; 0; -\sqrt{2}), \overrightarrow{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2}), \overrightarrow{SN} = (0; -\frac{1}{2}; -\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = (0; 4\sqrt{2}; 0)$$

$$V_{SABM} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{SB}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad V_{SAMN} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{SN}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SABMN} = V_{SABM} + V_{SAMN} = \sqrt{2}$$

Câu IV. 1) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$

Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2t dt$;

$x = 1 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = 1$.

Ta có:
$$I = \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{1+t} 2t dt = 2 \int_0^1 \frac{t^3 + t}{1+t} dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{1+t} \right) dt$$

$$I = 2 \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + 2t - 2 \ln|t+1| \right]_0^1 = 2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 2 \ln 2 \right] = \frac{11}{3} - 4 \ln 2$$

2) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1+x^2(1-x)]^8$

$$\begin{aligned} [1+x^2(1-x)]^8 &= C_8^0 + C_8^1 x^2 (1-x) + C_8^2 x^4 (1-x)^2 + C_8^3 x^6 (1-x)^3 + C_8^4 x^8 (1-x)^4 + \\ &+ C_8^5 x^{10} (1-x)^5 + C_8^6 x^{12} (1-x)^6 + C_8^7 x^{14} (1-x)^7 + C_8^8 x^{16} (1-x)^8 \end{aligned}$$

Bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8.

Vậy chỉ có trong số hạng thứ 4, thứ 5, với hệ số tương ứng là: $C_8^3 \cdot C_3^2, C_8^4 \cdot C_4^0$

Suy ra: $a_8 = C_8^3 \cdot C_3^2 + C_8^4 \cdot C_4^0 = 168 + 70 = 238$

Câu V (1 điểm)

Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện

$$\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3. \text{ Tính ba góc của tam giác ABC. Gọi}$$

$$M = 2\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C - 3 = 2\cos^2 A - 1 + 2\sqrt{2} \cdot 2\cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} - 3$$

Do $\sin \frac{A}{2} > 0, \cos \frac{B-C}{2} \leq 1$ nên $M \leq 2\cos^2 A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4$

Mặt khác tam giác ABC không tù nên $\cos A \geq 0, \cos^2 A \leq \cos A$. Suy ra:

$$M \leq 2\cos A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4 = 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}\right) + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4$$

$$= -4\sin^2 \frac{A}{2} + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 2 = -2\left(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 1\right)^2 \leq 0. \text{ Vậy } M \leq 0.$$

Theo giả thiết: $M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 A = \cos A \\ \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ B = C = 45^\circ \end{cases}$

ĐỀ SỐ 8: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2004 (KHỐI B)**Câu I (2 điểm)**

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (1) có đồ thị (C).

1) Khảo sát hàm số (1).

2) Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm uốn và chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Câu II (2 điểm) 1) Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$

2) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$

Câu III (3 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(1; 1), B(4; -3).

Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

2) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ . Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ .

3) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A (-4; -2; 4) và đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

Viết PT đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

Câu IV (2 điểm) 1) Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx$

2) Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Câu V (1 điểm) Xác định m để phương trình sau có nghiệm

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

ĐÁP ÁN

Câu I (2 điểm)

1. Khảo sát: a) Tập xác định: $\mathbb{R}$

b) Sự biến thiên: $y' = x^2 - 4x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$

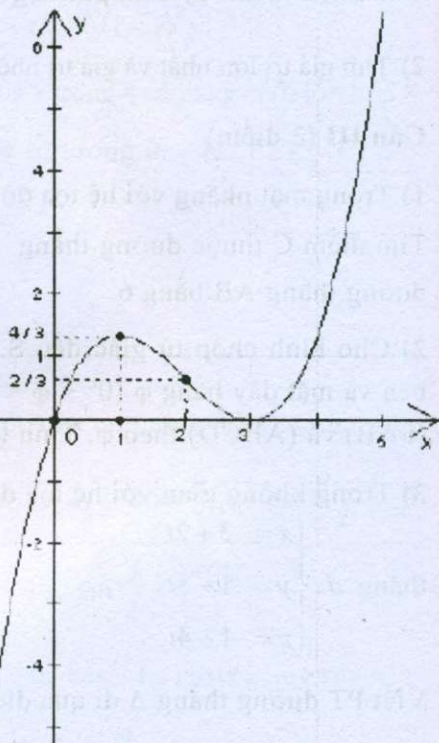
$y_{\text{CD}} = y(1) = \frac{4}{3}$, $y_{\text{CT}} = y(3) = 0$; $y'' = 2x - 4$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $y(2) = \frac{2}{3}$.

Đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(-\infty; 2)$, lõm trên khoảng $(2; +\infty)$

và có điểm uốn là $U\left(2; \frac{2}{3}\right)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			$\nearrow \frac{4}{3}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	
	$-\infty$					



c) Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với các trục Ox , Oy là các điểm $(0; 0)$, $(3; 0)$.

2) Tại điểm uốn $U\left(2; \frac{2}{3}\right)$, tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $y'(2) = -1$.

Tiếp tuyến tại điểm uốn U có phương trình: $y = -1(x - 2) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = -x + \frac{8}{3}$

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x bằng:

$$y'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow y'(x) \geq y'(2), \forall x$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$ (là hoành độ điểm uốn).

Do đó tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm uốn có hệ số góc nhỏ nhất.

Câu II (2 điểm)

1) Giải phương trình: $5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \operatorname{tg}^2 x$ (1)

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (*)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 5 \sin x - 2 = \frac{3 \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} (1 - \sin x) \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -2$ (loại)

$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn (*)).

2) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$

$$y' = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [1; e^3] \\ x = e^2 \in [1; e^3] \end{cases}$$

Khi đó: $y(1) = 0, y(e^2) = \frac{4}{e^2}, y(e^3) = \frac{9}{e^3}$

So sánh 3 giá trị trên, ta có: $\operatorname{Max}_{[1; e^3]} y = \frac{4}{e^2}$ khi $x = e^2$, $\operatorname{Min}_{[1; e^3]} y = 0$ khi $x = 1$

Câu III (3 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(1; 1), B(4; -3).

Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0$

Giả sử $C(x, y) \in (d)$: $x - 2y - 1 = 0$.

Để khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6 thì $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ d(C, (AB)) = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ \frac{|4x + 3y - 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \begin{cases} 4x + 3y - 37 = 0 \\ 4x + 3y + 23 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \begin{cases} 11y - 33 = 0 \\ 11y + 27 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, y = 3 \\ x = \frac{-43}{11}, y = \frac{-27}{11} \end{cases}$$

2) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ . Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ .

Gọi giao điểm của AC và BD là O thì $SO \perp (ABCD)$. suy ra $\widehat{SAO} = \varphi$.

Gọi trung điểm của AB là M thì $OM \perp AB$ và $SM \perp AB$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) là $\widehat{SMO}$.

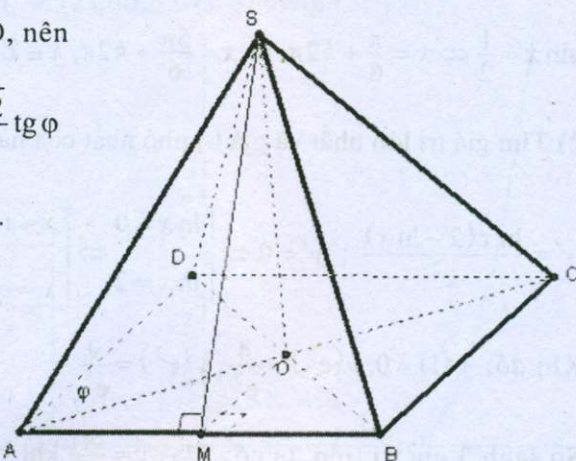
Tam giác OAB vuông cân tại O, nên

$$OM = \frac{a}{2}, OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{Do đó: } \operatorname{tg} \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO$$

$$= \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \operatorname{tg} \varphi$$



3) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A $(-4; -2; 4)$ và đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

Viết PT đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

• Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (2; -1; 4)$.

$$B \in d \Leftrightarrow B(-3 + 2t; 1 - t; -1 + 4t) \text{ (với một số thực } t \text{ nào đó).}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1 + 2t; 3 - t; -5 + 4t).$$

$$AB \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2(1 + 2t) - (3 - t) + 4(-5 + 4t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3; 2; -1) \Rightarrow \text{Phương trình của } \Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

Câu IV (2 điểm) 1) Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x \ln x}}{x} dx$

Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+3\ln x \Rightarrow 2t dt = 3 \frac{dx}{x}$; $x=1 \Rightarrow t=1$, $x=e \Rightarrow t=2$

Ta có: $I = \int_1^2 t \cdot \frac{t^2-1}{3} \cdot \frac{2t dt}{3} = \frac{2}{9} \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{116}{135}$

2) Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Mỗi đề kiểm tra phải có số câu dễ là 2 hoặc 3, nên có các trường hợp sau:

- 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó thì số cách chọn là: $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 23625$
- 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó thì số cách chọn là: $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10500$
- 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó thì số cách chọn là: $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 22750$

Vì các cách chọn trên đôi một khác nhau nên số đề kiểm tra có thể lập được là:

$$23625 + 10500 + 22750 = 56875$$

Câu V. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$.

Ta có: $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t \geq 0$, $t=0$ khi $x=0$

$t^2 = 2 - 2\sqrt{1-t^4} \leq 2 \Rightarrow t \leq \sqrt{2}$, $t = \sqrt{2}$ khi $x = \pm 1$

$\Rightarrow$ Tập giá trị của t là $[0; \sqrt{2}]$ (x liên tục trên đoạn $[-1; 1]$)

Phương trình đã cho trở thành: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow \frac{-t^2 + t + 2}{t+2} = m$ (*)

Xét $f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}$ với $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Ta có $f(t)$ liên tục trên đoạn $[0; \sqrt{2}]$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm $t \in [0; \sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow \min_{[0; \sqrt{2}]} f(t) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$; $\max_{[0; \sqrt{2}]} f(t) = f(0) = 1$

Vậy giá trị cần tìm của m là: $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$

ĐỀ SỐ 9: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2004 (KHỐI D)**Câu I (2 điểm)**

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ (1) với m là tham số.

- 1) Khảo sát hàm số (1) khi $m = 2$.
- 2) Tìm m để điểm uốn của đồ thị hàm số (1) thuộc đường thẳng $y = x + 1$.

Câu II (2 điểm)

- 1) Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$
- 2) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases} \quad (1)$$

Câu III (3 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-1; 0)$; $B(4; 0)$; $C(0; m)$ với $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m . Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.
- 2) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$.
Biết $A(a; 0; 0)$, $B(-a; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B_1(-a; 0; b)$, $a > 0$, $b > 0$.
a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b .
b) Cho a, b thay đổi, nhưng luôn thỏa mãn $a + b = 4$. Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.
- 3) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

Câu IV (2 điểm) 1) Tính tích phân $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$

- 2) Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niuton của

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^7 \text{ với } x > 0.$$

Câu V (1 điểm) CMR: Phương trình $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ có đúng một nghiệm

HƯỚNG DẪN

Câu I (2 điểm)

1. Với $m = 2 \Rightarrow y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Tập xác định: $\mathbb{R}$

• Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$

$y_{\text{CD}} = y(1) = 5$, $y_{\text{CT}} = y(3) = 1$. $y'' = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$. Đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(-\infty; 2)$, lõm trên khoảng $(2; +\infty)$ và có điểm uốn là $U(2; 3)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			5		1		$+\infty$
	$-\infty$						

• Đồ thị:

2) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$

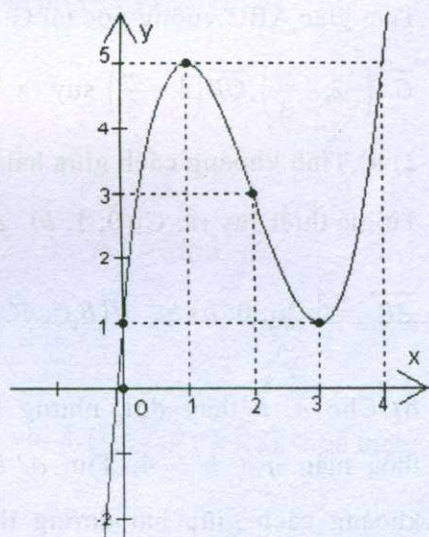
$$y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1 \quad (1);$$

$$y' = 3x^2 - 6mx + 9; \quad y'' = 6x - 6m$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = m \Rightarrow y = -2m^3 + 9m + 1$$

y'' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = m$, nên điểm uốn của đồ thị

hàm số (1) là $I(m; -2m^3 + 9m + 1)$



$$I \in (d): y = x + 1 \Leftrightarrow -2m^3 + 9m + 1 = m + 1 \Leftrightarrow 2m(4 - m^2) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \pm 2$$

Câu II (2 điểm)

1) Giải phương trình: $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - 1 = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \text{tg } x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) Đặt $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}, u \geq 0, v \geq 0$. Hệ (1) trở thành:
$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^3=1-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv=m \end{cases} (*)$$

$\Leftrightarrow u, v$ là 2 nghiệm của phương trình: $t^2 - t + m = 0$ (**)

Hệ (1) có nghiệm $(x; y) \Leftrightarrow$ Hệ (*) có nghiệm $u \geq 0, v \geq 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (**) có 2 nghiệm $t \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m \geq 0 \\ S = 1 \geq 0 \\ P = m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}$

Câu III (3 điểm)

1) Trọng tâm G của ΔABC có tọa độ:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{m}{3}. \text{ Vậy } G\left(1; \frac{m}{3}\right)$$

Tam giác ABC vuông góc tại G $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0$

$$\overrightarrow{GA}\left(-2; -\frac{m}{3}\right), \overrightarrow{GB}\left(3; -\frac{m}{3}\right) \text{ suy ra } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$$

2) a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b .

Từ giả thiết suy ra: $C_1(0; 1; b)$, $\overrightarrow{B_1C} = (a; 1; -b)$, $\overrightarrow{AC_1} = (-a; 1; b)$,

$$\overrightarrow{AB_1} = (-2a; 0; b) \Rightarrow d(B_1C, AC_1) = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot [\overrightarrow{B_1C} \times \overrightarrow{AC_1}]|}{|\overrightarrow{B_1C} \times \overrightarrow{AC_1}|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

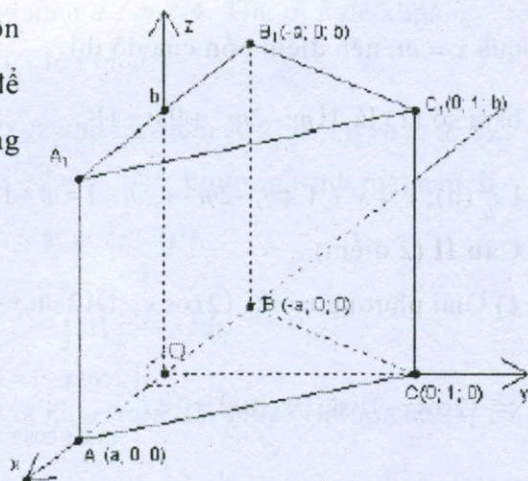
b) Cho a, b thay đổi, nhưng luôn thỏa mãn $a + b = 4$. Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{aligned} d(B_1C, AC_1) &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{2ab}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.

Vậy khoảng cách giữa B_1C và AC_1 lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $a = b = 2$.



3) $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu cần tìm $\Leftrightarrow I \in (P)$ và $IA = IB = IC$. Ta có:

$$IA^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2; IB^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2; IC^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

Suy ra hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$R = IA = 1 \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

Câu IV (2 điểm) 1) Tính tích phân $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 - x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x-1}{x^2-x} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I = x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - \int_2^3 x \cdot \frac{2x-1}{x^2-x} dx$

$$= 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x-1} dx = 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - (2x + \ln|x-1|) \Big|_2^3 = 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - 2 - \ln 2 = 3 \ln 3 - 2$$

2) Ta có: $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (\sqrt[3]{x})^{7-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot x^{\frac{7-k}{3}} \cdot x^{-\frac{k}{4}} = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot x^{\frac{28-7k}{12}}$

Số hạng không chứa x là số hạng tương ứng với k ($k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 7$) thỏa mãn:

$$\frac{28-7k}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 4. \text{ Vậy số hạng không chứa } x \text{ là } C_7^4 = 35$$

Câu V (1 điểm) CMR: Phương trình $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ có đúng một nghiệm

• Phương trình $\Leftrightarrow x^5 = (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 1 \Rightarrow x^5 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$

Với $x \geq 1$: Xét hàm số $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ liên tục $\forall x \geq 1$.

Ta có: $f(1) = -3 < 0, f(2) = 23 > 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(1; 2)$ (2)

$$f'(x) = 5x^4 - 2x - 2 = (2x^4 - 2x) + (2x^4 - 2) + x^4 = 2x(x^3 - 1) + 2(x^4 - 1) + x^4 > 0, \forall x \geq 1$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$. Từ (2), (3) suy ra (1) có đúng 1 nghiệm.

ĐỀ SỐ 10: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2005 (KHỎI A)

Câu I (2 điểm) Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ (*) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = \frac{1}{4}$.

2) Tìm m để hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu II (2 điểm) 1) Giải bất phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$ (1)

2) Giải phương trình $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$

Câu III (3 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x - y = 0$ và $d_2: 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1} \text{ và mặt phẳng } (P): 2x + y - 2z + 9 = 0.$$

a) Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.

b) Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), biết Δ đi qua A và vuông góc với d .

Câu IV (2 điểm) 1) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$

2) Tìm các số nguyên dương n sao cho

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$$

(C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V (1 điểm) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$

HƯỚNG DẪN

Câu 1 (2 điểm) Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ (*) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = \frac{1}{4}$.

Với $m = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{x}$; Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

• Sự biến thiên: $y' = \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{4x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$$y_{CD} = y(-2) = -1, y_{CT} = y(2) = 1$$

Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng; Đường thẳng $y = \frac{1}{4}x$ là tiệm cận xiên.

c) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 1 \nearrow +\infty$		

2) $y' = m - \frac{1}{x^2}$, $y' = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $m > 0$.

Nếu $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$. Xét dấu y' :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{m}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{m}}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số luôn có cực trị $\forall m > 0$. Điểm cực tiểu của (C_m) là $M\left(\frac{1}{\sqrt{m}}; 2\sqrt{m}\right)$

Tiệm cận xiên (d): $y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$; $d(M, (d)) = \frac{|\sqrt{m} - 2\sqrt{m}|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2 + 1}}$

$$d(M, (d)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1. \text{ Vậy } m = 1.$$

Câu II (2 điểm)

$$1) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2. \text{ Khi đó bất phương trình (1) } \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{5x-1} > \sqrt{2x-4} + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 5x-1 > 2x-4 + x-1 + 2\sqrt{(2x-4)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x+2 > \sqrt{(2x-4)(x-1)} \Leftrightarrow x^2+4x+4 > 2x^2-6x+4 \Leftrightarrow x^2-10x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 10$$

Kết hợp với điều kiện suy ra bất phương trình có nghiệm: $2 \leq x < 10$.

$$2) \cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (1 + \cos 6x) \cos 2x - (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos 4x + 3)(\cos 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu III (3 điểm)

1) Do $A \in d_1 \Rightarrow A(t, t)$. Ta có A, C đối xứng nhau qua BD và $B, D \in Ox$ nên $C(t, -t)$. Mặt khác $C \in d_2$ nên $2t - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Suy ra: $A(1; 1), C(1; -1)$

Trung điểm $I(1; 0)$ của AC là tâm của hình vuông ABCD nên $IB = ID = IA = 1$

Do $I \in Ox$ và là trung điểm của BD nên $B(0; 0), D(2; 0)$ hoặc $B(2; 0), D(0; 0)$

Vậy 4 đỉnh của hình vuông là:

$A(1; 1), B(0; 0), C(1; -1), D(2; 0)$ hoặc $A(1; 1), B(2; 0), C(1; -1), D(0; 0)$

2) a) Tìm tọa độ điểm $I \in d$ sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.

$$\text{Phương trình tham số của } d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}. \text{ Điểm } I \in (d) \Rightarrow I(1 - t; -3 + 2t; 3 + t)$$

$$d(I, (P)) = \frac{|2(1-t) - 3 + 2t - 2(3+t) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2|1-t|}{3} = 2$$

$$\Leftrightarrow |1-t| = 3 \Leftrightarrow t = -2; t = 4. \text{ Vậy có 2 điểm } I_1(-3; 5; 7), I_2(3; -7; 1)$$

b) Do $A \in (d)$ nên $A(1-t; -3+2t; 3+t)$.

$$\text{Ta có } A \in (P) \Leftrightarrow 2(1-t) - 3 + 2t - 2(3+t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(0; -1; 4)$$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$, đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. Vì $\Delta \subset (P)$ và $\Delta \perp (d)$ nên Δ có vectơ chỉ phương

$$\vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}, \vec{u}] = (5; 0; 5) \Rightarrow \text{Phương trình tham số của } \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Câu IV (2 điểm)

1) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \cos x + 1) \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$

Đặt $t = \sqrt{1 + 3 \cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{t^2 - 1}{3}; dt = \frac{-3 \sin x}{2\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$;

$x = 0 \Rightarrow t = 2, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$I = \int_2^1 \left(2 \cdot \frac{t^2 - 1}{3} + 1 \right) \left(-\frac{2}{3} \right) dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3} t^3 + t \right) \Big|_1^2 = \frac{34}{27}$$

2) Ta có: $(1 + x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Đạo hàm 2 vế ta có:

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2 x + 3C_{2n+1}^3 x^2 + \dots + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Thay $x = -2 \Rightarrow 2n+1 = C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1}$

Từ giả thiết suy ra: $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$

Câu V (1 điểm)

Với $a, b > 0$ ta có: $4ab < (a+b)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Áp dụng kết quả trên ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \right) \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2z} \right) \quad (2); \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \right) \quad (3)$

Cộng các vế của (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1 \quad (\text{đpcm})$$

ĐỀ SỐ 11: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2005 (KHỐI B)**Câu I (2 điểm)**

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$ (*) (m là tham số).

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = 1$.
- 2) Chứng minh rằng: Với m bất kì, đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa 2 điểm đó bằng $\sqrt{20}$

Câu II (2 điểm) 1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$$

- 2) Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

Câu III (3 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(2; 0) và B(6; 4).
Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.
- 2) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với $A(0; -3; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $B_1(4; 0; 4)$
 - a) Tìm tọa độ các đỉnh A_1 , C_1 . Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1) .
 - b) Gọi M là trung điểm của A_1B_1 . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC_1 . Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm N. Tính độ dài đoạn MN.

Câu IV (2 điểm) 1) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$

- 2) Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Câu V (1 điểm) Chứng minh rằng: với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x. \text{ Khi nào đẳng thức xảy ra?}$$

HƯỚNG DẪN

Câu 1 (2 điểm)

1) Với $m = 1 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$; • Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• Sự biến thiên: $y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 0$.

$$y_{\text{CD}} = y(-2) = -2, y_{\text{CT}} = y(0) = 2.$$

Đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng. Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty \nearrow -2 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 2 \nearrow +\infty$		

2) Chứng minh rằng: Với m bất kì, đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa 2 điểm đó bằng $\sqrt{20}$

Ta có: $y = x + m + \frac{1}{x+1}$ • Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• Sự biến thiên: $y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 0$.

Xét dấu y' :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

Đồ thị của hàm số (*) luôn có điểm cực đại là $M(-2, m - 3)$ và điểm cực tiểu là $N(0; m + 1) \Rightarrow MN = \sqrt{[0 - (-2)]^2 + [(m + 1) - (m - 3)]^2} = \sqrt{20}$ (đpcm)

Câu II (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 & (1) \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \geq 1$ và $0 < y \leq 2$.

$$(2) \Leftrightarrow 3(1 + \log_3 x) - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y \Leftrightarrow x = y$$

Thay $y = x$ vào (1) ta có: $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$

$$\Leftrightarrow (x-1) + (2-x) + 2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$ và $(2; 2)$

$$2) \text{ PT } \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu III (3 điểm)

1) Gọi tâm của (C) là $I(a; b)$ và bán kính của (C) là $R \Rightarrow IB = \sqrt{(6-a)^2 + (4-b)^2}$

(C) tiếp xúc với Ox tại $A(2; 0) \Rightarrow a = 2$ và $|b| = R$.

$$IB = 5 \Leftrightarrow (6-2)^2 + (4-b)^2 = 25 \Leftrightarrow (4-b)^2 = 3^2 \Leftrightarrow b = 1, b = 7$$

Với $a = 2, b = 1$ ta có đường tròn: $(C_1): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Với $a = 2, b = 7$ ta có đường tròn: $(C_2): (x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$

2a) Do $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ và $\overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 4) \Rightarrow A_1(0; -3; 4), C(0; 3; 4)$

$\overrightarrow{BC} = (-4; 3; 0) \Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của $\text{mp}(BCC_1B_1)$ là $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}] = (12; 16; 0)$

Phương trình mặt phẳng (BCC_1B_1) : $12(x-4) + 16y = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

Bán kính mặt cầu: $R = d(A, (BCC_1B_1)) = \frac{|-3 \cdot 4 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5}$

Phương trình mặt cầu: $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}$

b) Ta có M là trung điểm của $A_1B_1 \Rightarrow M(2; \frac{-3}{2}; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2; \frac{3}{2}; 4); \overrightarrow{BC_1} = (-4; 3; 4)$

Đề (P) đi qua A, M và song song với BC_1 thì vectơ pháp tuyến của (P) là:

$$\vec{n_p} = [\vec{AM}, \vec{BC_1}] = (-6; -24; 12) \Rightarrow -6x - 24(y + 3) + 12z = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 2z + 12 = 0$$

Ta thấy $B(4; 0; 0) \notin (P)$. Do đó $(P): x + 4y - 2z + 12 = 0$ đi qua A, M và // BC_1 .

• Ta có $\vec{A_1C_1} = (0; 6; 0)$. Phương trình tham số của (A_1C_1) là:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = 4 \end{cases}$$

$$N \in (A_1C_1) \Rightarrow N(0; -3 + t; 4). \text{ Do } N \in (P) \text{ nên } 0 + 4(-3 + t) - 2 \cdot 4 + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Vậy } N(0; -1; 4) \Rightarrow MN = \sqrt{(2-0)^2 + \left(-\frac{3}{2} + 1\right)^2 + (4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Câu IV: 1) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \sin x}{1 + \cos x} dx$

$$\text{Đặt } t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx; x = 0 \Rightarrow t = 2, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$I = 2 \int_2^1 \frac{(t-1)^2}{t} (-dt) = 2 \int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right) dt = 2 \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + \ln|t|\right) \Big|_1^2 = -4 + 2\ln 2 + 3 = 2\ln 2 - 1$$

2) Có $C_{12}^4 C_3^1$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất. Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_8^4 C_2^1$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai. Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có $C_4^4 C_1^1$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Vậy số cách phân công các thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $C_{12}^4 C_3^1 \cdot C_8^4 C_2^1 \cdot C_4^4 C_1^1 = 207900$

Câu V (1 điểm) CMR: $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2 \cdot 3^x; \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2 \cdot 5^x$$

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2 \cdot 4^x. \text{ Cộng 3 BĐT trên } \Rightarrow (\text{đpcm})$$

ĐỀ SỐ 12: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2005 (KHỐI D)**Câu I (2 điểm)**

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (*) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = 2$.

2) Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1 . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Câu II (2 điểm) 1) Giải phương trình: $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$

2) Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

Câu III (3 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $C(2; 0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) , biết rằng 2 điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và $\triangle ABC$ là tam giác đều.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 2 đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ và } d_2: \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả 2 đường thẳng d_1 và d_2 .

b) Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt 2 đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A, B . Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Câu IV (2 điểm) 1) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x \, dx$

2) Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng

$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$ (n là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V (1 điểm) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. CMR:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}. \text{ Khi nào đẳng thức xảy ra?}$$

HƯỚNG DẪN

Câu I (2 điểm)

1) Với $m = 2$: $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$

a) Tập xác định: $\mathbb{R}$

b) Sự biến thiên: $y' = x^2 - 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$

Bảng biến thiên:

$y_{\text{CB}} = y(0) = \frac{1}{3}, y_{\text{CT}} = y(2) = -1$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{3}$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

c) Tính lồi lõm và điểm uốn: $y'' = 2x - 2$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Đồ thị hàm số nhận $U\left(1; -\frac{1}{3}\right)$ là điểm uốn.

2) Ta có: $y' = x^2 - mx$. M là điểm $\in (C_m)$ có hoành độ bằng $-1 \Rightarrow M\left(-1; -\frac{m}{2}\right)$

Tiếp tuyến tại M của (C_m) là (Δ) : $y + \frac{m}{2} = y'(-1)(x+1) \Leftrightarrow (m+1)x - y + \frac{m+2}{2} = 0$

$(\Delta) // (d): 5x - y = 0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+1=5 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$. Vậy $m=4$.

Câu II (2 điểm)

1) Điều kiện: $x \geq -1$

PT $\Leftrightarrow 2\sqrt{(1+\sqrt{x+1})^2} - \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow 2(1+\sqrt{x+1}) - \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3$

2) PT $\Leftrightarrow 2(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 4\cos^2 x \sin^2 x + \left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x + (-\cos 4x + \sin 2x) - 3 = 0 \Leftrightarrow -\sin^2 2x + (2\sin^2 2x - 1) + \sin 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sin 2x - 1)(\sin 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Câu III (3 điểm)

1) Giả sử $A(x_0, y_0)$. Do A, B đối xứng nhau qua Ox nên $B(x_0, -y_0)$.

$$\text{Tacó } AB^2 = 4y_0^2; AC^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2. \text{ Do } A \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4} \quad (1)$$

$$\text{Do } \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow (x_0 - 2)^2 + y_0^2 = 4y_0^2 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 - 3y_0^2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2)} \Rightarrow (x_0 - 2)^2 + \frac{3}{4}(x_0^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)(7x_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \vee x_0 = \frac{2}{7}$$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow A \equiv B \equiv C \Rightarrow \text{loại.}$

$$\text{Với } x_0 = \frac{2}{7} \Rightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4} = \frac{48}{49} \Rightarrow y_0 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Vậy } A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

2) a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả 2 đường thẳng d_1 và d_2 .

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ đi qua } M_1(1; -2; -1) \text{ và có vectơ chỉ phương } \vec{u}_1 = (3; -1; 2)$$

$$d_2: \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0 \end{cases} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (3; -1; 2)$$

Do $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ và $M_1 \notin d_2$ nên $d_1 \parallel d_2$.

• Mặt phẳng (P) chứa d_2 nên có phương trình dạng:

$$\alpha(x+y-z-2) + \beta(x+3y-12) = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

$$\text{Do } M_1 \in (P) \text{ nên } \alpha(1-2+1-2) + \beta(1-6-12) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 17\beta = 0$$

$$\text{Chọn } \alpha = 17 \Rightarrow \beta = -2. \text{ Phương trình (P) là: } 15x + 11y - 17z - 10 = 0$$

b) Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt 2 đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A, B.

Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

$$A, B \in \text{Oxz} \Rightarrow y_A = y_B = 0. B \in d_2 \Rightarrow \begin{cases} x_B - z_B - 2 = 0 \\ x_B - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 12 \\ z_B = 10 \end{cases} \Rightarrow B(12; 0; 10)$$

$$A \in d_1 \Rightarrow \frac{x_A - 1}{3} = \frac{2}{-1} = \frac{z_A + 1}{2} \Rightarrow x_A = z_A = -5 \Rightarrow A(-5; 0; -5) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (-5; 0; 5)$$

$$\overrightarrow{OB} = (12; 0; 10) \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0; -10; 0) \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ (đvdt)}$$

Câu IV (2 điểm)

$$1) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e + \frac{\pi}{4} - 1$$

$$2) \text{ĐK: } n \geq 3. \text{ Khi đó: } M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n-3)!} + 3 \frac{n!}{(n-3)!}}{(n+1)!} = \frac{n+4}{(n+1)(n-3)!}$$

$$\text{Ta có: } C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2 \frac{(n+2)!}{2!n!} + 2 \frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} + \frac{(n+4)!}{2!(n+2)!}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+2)(n+1) + (n+3)(n+2) + \frac{(n+4)(n+3)}{2} = 3n^2 + 12n + 14$$

$$\Rightarrow 3n^2 + 12n + 14 = 149 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \Leftrightarrow n = -9, n = 5$$

$$\text{Do } n \text{ là số nguyên dương nên } n = 5 \Rightarrow M = \frac{n+4}{(n+1)(n-3)!} = \frac{9}{6 \cdot 2!} = \frac{3}{4}$$

Câu V (1 điểm)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có: $1 + x^3 + y^3 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3xy$

$$\text{Kết hợp với } xyz = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \sqrt{\frac{3}{xy}} = \sqrt{3z} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \sqrt{3x} \quad (2); \quad \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \sqrt{3y} \quad (3).$$

$$\text{Mặt khác: } \sqrt{3x} + \sqrt{3y} + \sqrt{3z} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3x} \cdot \sqrt{3y} \cdot \sqrt{3z}} \Rightarrow \sqrt{3x} + \sqrt{3y} + \sqrt{3z} \geq 3\sqrt{3} \quad (4)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3) và (4) suy ra (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ (1), (2), (3) và (4) là các đẳng thức $\Leftrightarrow x = y = 1$.

ĐỀ SỐ 13: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2006 (KHỐI A)
PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

- Câu I (2 điểm)** 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$
 2. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

Câu II (2 điểm) 1. Giải phương trình: $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$ (1)

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 & (1) \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Câu III (2 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.
 2. Viết PT mặt phẳng chứa A'C và tạo với (Oxy) một góc α biết $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Câu IV (2 điểm) 1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$

2. Cho hai số thực $x \neq 0$, $y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng:
 $d_1: x + y + 3 = 0$, $d_2: x - y - 4 = 0$, $d_3: x - 2y = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 .

2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niuton của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$

biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$

(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$ (1)
 2. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

HƯỚNG DẪN

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

• Tập xác định: $\mathbb{R}$

• Sự biến thiên: $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2$

Bảng biến thiên:

$$y_{\text{CB}} = y(1) = 1, y_{\text{CT}} = y(2) = 0$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

2. Tìm m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Phương trình đã cho tương đương với: $2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| - 4 = m - 4$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số

$$y = 2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| - 4 \text{ với đường thẳng } y = m - 4$$

HS $y = 2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| - 4$ là hàm chẵn nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

Từ đồ thị của hàm số đã cho suy ra đồ thị hàm số: $y = 2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| - 4$

Từ đồ thị suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$$

Câu II (2 điểm) 1. Giải phương trình: $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$ (1)

Điều kiện: $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*).

$$(1) \Leftrightarrow 2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$(4 - 3\sin^2 2x) - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow (\sin 2x - 1)(3\sin 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \text{ Kết hợp với điều kiện (*) suy ra: } x = \frac{5\pi}{4} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 & (1) \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

ĐK: $x \geq -1, y \geq -1, xy \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{xy}$ ($t \geq 0$). Từ (1) suy ra: $x + y = 3 + t$.

Bình phương hai vế của (2) ta được: $(x + y) + 2 + 2\sqrt{xy + (x + y) + 1} = 16$

$$\Leftrightarrow (3 + t) + 2 + 2\sqrt{t^2 + (3 + t) + 1} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 + t + 4} = 11 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 4(t^2 + t + 4) = (11 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 3t^2 + 26t - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ (t - 3)(3t + 35) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$$

Với $t = 3$ ta có: $x + y = 6$ và $xy = 9 \Rightarrow x = y = 3$. Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (3, 3)$

Câu III (2 điểm)

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN .

Gọi (P) là mặt phẳng chứa $A'C$ và song song với $MN \Rightarrow d(A'C, MN) = d(M, (P))$

Ta có: $C(1; 1; 0), M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1), \overrightarrow{MN} = (0; 1; 0)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1; 0; 1)$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A'(0; 0; 1)$, có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; 1)$

có phương trình là: $1(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + z - 1 = 0$

$$\text{Vậy } d(A'C, MN) = d(M, (P)) = \frac{\left| \frac{1}{2} + 0 - 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2. Viết PT mặt phẳng chứa $A'C$ và tạo với (Oxy) một góc α biết $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Gọi mặt phẳng cần tìm là (Q) : $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$)

Do (Q) đi qua $A'(0; 0; 1)$ và $C(1; 1; 0)$ nên $\begin{cases} c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = a + b = -d$

Do đó phương trình (Q) có dạng: $ax + by + (a + b)z - (a + b) = 0$

Mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; a + b)$, mặt phẳng Oxy có vector pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Do góc giữa (Q) và Oxy là α mà $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ nên $|\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+(a+b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow 6(a+b)^2 = a^2+b^2+(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+5ab=0 \Leftrightarrow (a+2b)(b+2a)=0 \Leftrightarrow a=-2b \vee b=-2a$$

Với $a=-2b$, chọn $b=-1$ suy ra mặt phẳng (Q): $2x-y+z-1=0$

Với $b=-2a$, chọn $a=1$ suy ra mặt phẳng (Q): $x-2y-z+1=0$

Câu IV (2 điểm)

$$1). I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+3 \sin^2 x}} dx$$

Đặt $t = 1 + 3 \sin^2 x \Rightarrow dt = 3 \sin 2x dx$. Với $x = 0$ thì $t = 1$, với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 4$.

$$\text{Suy ra: } I = \frac{1}{3} \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3} \sqrt{t} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}$$

$$2. \text{ Từ giả thiết } \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}. \text{ Đặt } \frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b \Rightarrow a+b = a^2 + b^2 - ab$$

$$\text{Do } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ nên } a+b = (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - 4(a+b) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a+b \leq 4$$

$$A = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (a+b)^2 \leq 16$$

Với $a=b=2$ hay $x=y=\frac{1}{2}$ thì $A=16$. Vậy giá trị lớn nhất của A là 16.

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Do $M \in d_3$ nên $M(2m; m)$.

$$\text{Ta có: } d(M, d_1) = \frac{|2m+m+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}|m+1|, \quad d(M, d_2) = \frac{|2m-m-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|m-4|$$

$$d(M, d_1) = 2d(M, d_2) \Leftrightarrow \frac{3|m+1|}{\sqrt{2}} = \frac{2|m-4|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 9(m+1)^2 = 4(m-4)^2$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 50m - 55 = 0 \Leftrightarrow 5(m-1)(m+11) = 0 \Leftrightarrow m = -11 \vee m = 1$$

Với $m = -11$ ta được điểm $M_1(-22; -11)$; với $m = 1$ ta được điểm $M_2(2; 1)$

2. Từ khai triển nhị thức Niuton của $(1+1)^{2n+1}$ suy ra:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$$

Ta có: $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}, \forall k, 0 \leq k \leq 2n+1$ và $C_{2n+1}^0 = 1$ nên

$$2^{2n+1} = 2(1 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) = 2 \cdot 2^{20} = 2^{21} \Rightarrow n = 10$$

$$\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^{-4})^{10-k} (x^7)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$$

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k với k thỏa mãn: $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$

Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6 = 210$

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

$$1. 3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ($t > 0$), phương trình (1) trở thành $3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)^2(3t-2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \quad (\text{do } t > 0) \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$$

2. Kẻ đường sinh AA' . Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và H là hình chiếu của B trên đường thẳng $A'D$.

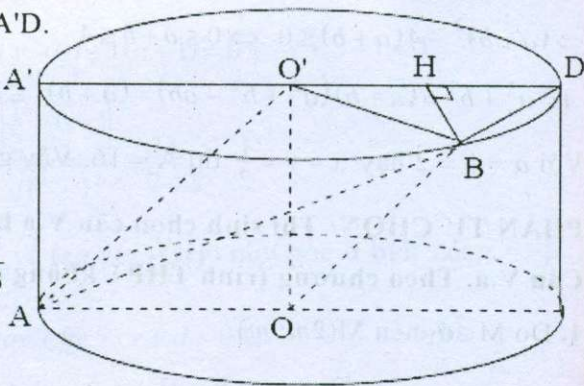
Do $BH \perp A'D$ và $BH \perp AA'$ nên $BH \perp (AOO'A')$

$$\Rightarrow V_{OO'AB} = \frac{1}{3} \cdot BH \cdot S_{AOO'}$$

$$\text{Ta có: } A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = \sqrt{3}$$

$$a \Rightarrow BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = a$$

$$\Rightarrow \triangle BO'D \text{ đều} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Do $\triangle AOO'$ vuông cân cạnh bên bằng a nên $S_{AOO'} = \frac{1}{2}a^2$

$$\Rightarrow V_{OO'AB} = \frac{1}{3} \cdot BH \cdot S_{AOO'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$$

ĐỀ SỐ 14: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2006 (KHỐI B)
PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên của (C).

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\cotg x + \sin x \left(1 + \tg x \tg \frac{x}{2} \right) = 4$
2. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}; \quad d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với d_1 và d_2 .
2. Tìm tọa độ các điểm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng

Câu IV (2 điểm) 1. Tính tích phân: $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

2. Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$$

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm M(-3; 1). Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 .

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

- Sự biến thiên: $y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty \nearrow -5 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow -1 \nearrow +\infty$		

2. Tiệm cận xiên của đồ thị (C) có phương trình $y = x - 1$ nên tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận có hệ số góc là $k = -1$.

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = -1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Với $x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 \Rightarrow$ PT tiếp tuyến là $(d_1): y = -x - 2\sqrt{2} - 5$

Với $x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 \Rightarrow$ PT tiếp tuyến là $(d_1): y = -x + 2\sqrt{2} - 5$

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\cotg x + \sin x \left(1 + \tg x \tg \frac{x}{2}\right) = 4 \quad (1)$

Điều kiện: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \quad (*)$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \left(\cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \quad (1)$ có hai nghiệm thực phân biệt

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ f(x) = 3x^2 - (m - 4)x - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (3)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $-\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 4)^2 + 12 > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{m - 4}{6} > -\frac{1}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{m - 4}{2} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \geq \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$$

Câu III (2 điểm)

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với d_1 và d_2 .

Vector chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là: $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$, $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -3; -5)$

Vì (P) qua $A(0; 1; 2) \Rightarrow (P): x + 3y + 5z - 13 = 0$

Do $B(0; 1; -1) \in d_1, C(1; -1; 2) \in d_2$, nhưng $B, C \notin (P)$, nên $d_1, d_2 \parallel (P)$.

Vậy, phương trình mặt phẳng cần tìm là (P): $x + 3y + 5z - 13 = 0$.

2. Tìm tọa độ các điểm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng

• Do $M \in d_1, N \in d_2$ nên $M(2m; 1 + m; -1 - m)$ và $N(1 + n; -1 - 2n; 2 + n)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2m; m; -3 - m), \overrightarrow{AN} = (1 + n; -2 - 2n; n)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = (-mn - 2m - 6n - 6; -3mn - m - 3n - 3; -5mn - 5m)$$

$$A, M, N \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -mn - 2m - 6n - 6 = -3mn - m - 3n - 3 = -5mn - 5m = 0 \Leftrightarrow m = 0, n = -1$$

$$\Rightarrow M(0; 1; -1), N(0; 1; 1)$$

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân:
$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Với $x = \ln 3 \Rightarrow t = 3$, với $x = \ln 5$ thì $t = 5$.

$$\Rightarrow I = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^5 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \ln \left| \frac{t-2}{t-1} \right| \Big|_3^5 = \ln \frac{3}{2}$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét $M(x-1; -y)$ và $N(x+1; y)$

Do $OM + ON \geq MN$ nên $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{4 + 4y^2} = 2\sqrt{1 + y^2}$

$$\Rightarrow A \geq 2\sqrt{1 + y^2} + |y-2| = f(y)$$

• Với $y \leq 2 \Rightarrow f(y) = 2\sqrt{1 + y^2} + 2 - y \Rightarrow f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2}} - 1$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4y^2 = 1 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

y	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2
$f'(y)$	$-$	0	$+$
$f(y)$			

• Với $y \geq 2 \Rightarrow f(y) \geq 2\sqrt{1+y^2} \geq 2\sqrt{5} > 2 + \sqrt{3}$

Vậy $A \geq 2 + \sqrt{3} \forall x, y \in \mathbb{R}$

Với $x=0$ và $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $A=2+\sqrt{3}$ nên giá trị nhỏ nhất của A là $2+\sqrt{3}$

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Đường tròn (C) có tâm $I(1; 3)$ và bán kính $R = 2$. Ta có: $MI = 2\sqrt{5} > R$ nên M nằm ngoài (C) . Gọi $T(x_0, y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (C)

Ta có: $\overrightarrow{MT} = (x_0 + 3; y_0 - 1)$, $\overrightarrow{IT} = (x_0 - 1; y_0 - 3)$ và $\begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{MT} \perp \overrightarrow{IT} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{IT} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 6y_0 + 6 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \Rightarrow 2x_0 + y_0 - 3 = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) là: $2x + y - 3 = 0$

2. Số tập con gồm k phần tử của A là C_n^k , từ giả thiết suy ra: $C_n^4 = 20C_n^2$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = 20 \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 240 \Leftrightarrow (n-18)(n+13) = 0 \Leftrightarrow n = 18$$

Ta có: $\frac{C_{18}^{k+1}}{C_{18}^k} = \frac{18-k}{k+1}$. Để $C_{18}^{k+1} > C_{18}^k$ thì $18-k > k+1 \Rightarrow k < 9$

$$\text{Vậy } C_{18}^9 > C_{18}^8 > \dots > C_{18}^1 > C_{18}^0 \Rightarrow C_{18}^9 > C_{18}^{10} > \dots > C_{18}^{17} > C_{18}^{18}$$

Vậy, số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất khi và chỉ khi $k = 9$.

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải bất phương trình: $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$

$$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) - \log_5 16 < \log_5 5(2^{x-2} + 1) \Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 16 + \log_5 [5(2^{x-2} + 1)]$$

$$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 [80(2^{x-2} + 1)] \Leftrightarrow 4^x + 144 < 80(2^{x-2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 < 0 \Leftrightarrow (2^x - 16)(2^x - 4) < 0 \Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

2. Xét $\triangle ABM$ và $\triangle BCA$ vuông có $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \triangle ABM$ đồng dạng $\triangle BCA$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow MB \perp AC \quad (1)$$

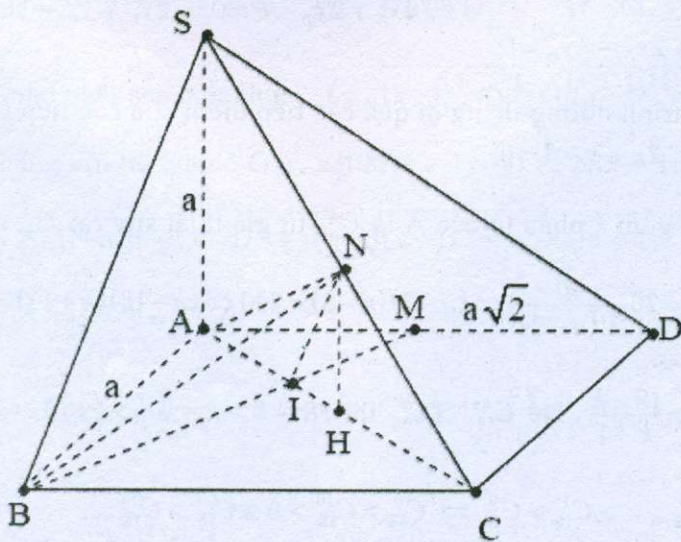
$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) } \Rightarrow MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$$

Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow NH$ là đường trung bình của $\triangle SAC$

$$\Rightarrow NH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2} \text{ và } NH \parallel SA \text{ nên } NH \perp (ABI), \text{ do đó } V_{ANIB} = \frac{1}{3} NH \cdot S_{\triangle ABI}$$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}, BI^2 = AB^2 - AI^2 \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABI} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{6} \Rightarrow V_{ANIB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36}$$



ĐỀ SỐ 15: ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2006 (KHỎI D)
PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A(3; 20) và có hệ số góc là m.
Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

Câu II (2 điểm) 1. Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.

2. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3) và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}, \quad d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$$

1. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1 .
2. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 .

Câu IV (2 điểm) 1. Tính tích phân: $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$

2. Chứng minh rằng: $\forall a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$$

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng d: $x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

2. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

2. Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

ĐÁP ÁN

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C): $y = x^3 - 3x + 2$

• Tập xác định: $\mathbb{R}$

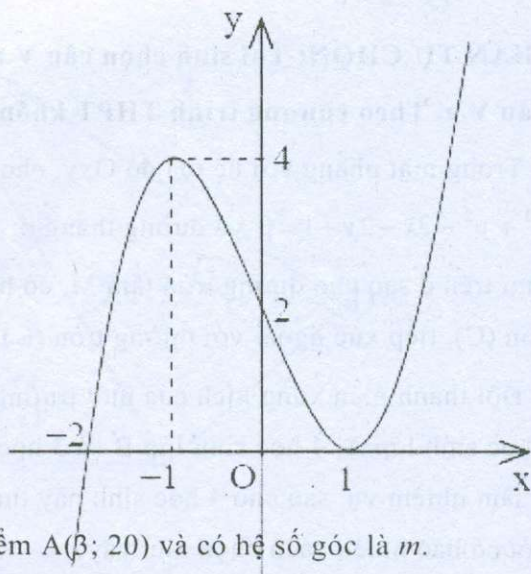
• Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		0		$+\infty$
	$-\infty$						

$y_{CD} = y(-1) = 4, y_{CT} = y(1) = 0$

• Đồ thị:



2. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3; 20)$ và có hệ số góc là m .

Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

Phương trình đường thẳng (d) : $y = m(x - 3) + 20$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$$x^3 - 3x + 2 = m(x - 3) + 20 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6 - m) = 0$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = x^2 + 3x + 6 - m = 0$

$$\text{có 2 nghiệm phân biệt khác 3} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 - 4(6 - m) > 0 \\ f(3) = 24 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$$

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.

$$\Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3) + (1 - 2\sin^2 x) - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ (1)

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x-1} \quad (t \geq 0) \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2}. \text{ Khi đó: } (1) \Leftrightarrow t + \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{t^2+1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2 + 2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}, \quad d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$$

1. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1 .

Mặt phẳng (α) đi qua $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với d_1 có phương trình:

$$2(x-1) - (y-2) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0. \text{ Tọa độ giao điểm } H \text{ của } d_1$$

$$\text{và } (\alpha) \text{ là nghiệm của: } \begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(0; -1; 2).$$

Do A' đối xứng với A qua d_1 nên H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-1; -4; 1)$

2. Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 nên $\Delta \subset (\alpha)$.

Δ cắt $d_2 \Rightarrow \Delta$ đi qua giao điểm B của d_2 và (α) . Tọa độ điểm B là nghiệm

$$\text{của hệ: } \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \Rightarrow B(2; -1; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1; -3; -5) \\ z=-2 \end{cases}$$

Δ đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ chỉ phương suy ra (Δ) :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$$

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} (x-2)e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = -\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{5-3e^2}{4}$$

2. CMR: $\forall a > 0$, hệ sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y-x = a \end{cases} \quad (1)$

Điều kiện: $x, y > -1$. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x) \\ y = x+a \end{cases} \quad (2)$

Hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm duy nhất $\in (-1; +\infty)$

Xét hàm số $f(x) = e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x)$, với $x > -1$

Do $f(x)$ liên tục trong khoảng $(-1; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; +\infty)$. Mặt khác:

$$f'(x) = e^{x+a} - e^x + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+a+x} = e^x (e^a - 1) + \frac{a}{(1+x)(1+a+x)} > 0, \forall x > -1$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-1; +\infty)$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; +\infty)$.

Vậy, hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng d: $x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

• Đường tròn (C) có tâm I(1; 1), bán kính $R = 1$.

Do $M \in d$ nên $M(m; m + 3)$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow MI = R + 2R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(m-1)^2 + (m+2)^2} = 3 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = -2$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $M_1(1; 4), M_2(-2; 1)$

2. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

• Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là $C_{12}^4 = 495$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

- Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh.

$$\text{Số cách chọn là: } C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 120$$

- Lớp B có 2 học sinh, các lớp C, A mỗi lớp có 1 học sinh.

$$\text{Số cách chọn là: } C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_5^1 = 90$$

- Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh.

$$\text{Số cách chọn là: } C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 60$$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là: $120 + 90 + 60 = 270$

Vậy, số cách chọn phải tìm là: $495 - 270 = 225$.

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}(2^{x^2-x} - 1) - 4(2^{x^2-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow (4^x - 4)(2^{x^2-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 4 \\ 2^{x^2-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = 1$

2. Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

• Gọi K là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SK.

Do $BC \perp AK$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp AH$

Do $AH \perp SK$, $AH \perp BC$ nên $AH \perp (SBC)$.

Xét tam giác vuông SAK:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$$

Xét tam giác vuông SAB:

$$SA^2 = SM \cdot SB \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4}{5}$$

Xét tam giác vuông SAC:

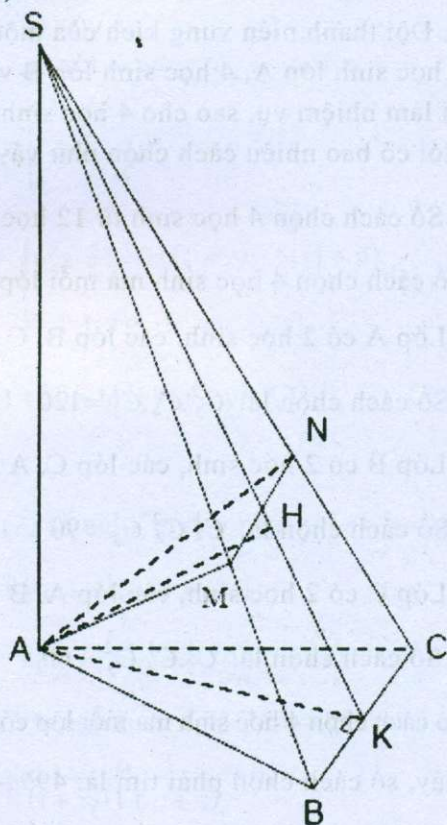
$$SA^2 = SN \cdot SC \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{S_{SMN}}{S_{SBC}} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow S_{BCNM} = \frac{9}{25} \cdot S_{SBC} = \frac{9\sqrt{19}}{100} a^2$$

Vậy thể tích của khối chóp A.BCNM là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{BCNM} = \frac{3\sqrt{3}}{50} a^3$$



CHƯƠNG X: CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC TỰ LUYỆN

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 1

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = \frac{2mx^2 + (m^2 - 1)x + 2 - m^2 - m}{x + 1}$

1. Khảo sát, vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$
2. Chứng minh rằng: Tiệm cận xiên của họ đồ thị (C_m) luôn tiếp xúc với 1 parabol cố định, xác định parabol này.

Câu II. 1. Tìm m để phương trình: $m(x+1) = (2m+1)\sqrt{x^2+2x+2}$ có nghiệm

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y} - 6\sqrt{y} + 4 = 0 \\ y\sqrt{z} - 6\sqrt{z} + 4 = 0 \\ z\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + 4 = 0 \end{cases}$$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\cos x \cdot \cos 4x + \cos 2x \cdot \cos 3x = 0$

2. Cho ΔABC có $\operatorname{tg} 2C = \frac{2bc}{b^2 - c^2}$. Chứng minh: ΔABC vuông

Câu IV. 1. Tính $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$; $J = \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(1+b^3)} \leq 2$

Câu V. Cho đường thẳng (D) : $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ và elip (E) : $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

Giả sử đường thẳng (D) cắt elip (E) tại 2 điểm B, C .

1. Tìm $A \in (E)$ để tam giác ABC cân
2. Tìm điểm $A \in (E)$ để S_{ABC} max

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = f(x, m) = \frac{2x+m}{x-1}$ và điểm $N(2, 3)$

1. Với $m = 5$: a. Tìm $M \in (C_5)$ để tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất

b. Tìm M_1, M_2 trên mỗi nhánh của (C_5) để $|M_1 M_2|$ là nhỏ nhất.

2. Tìm m để từ $N(2, 3)$ kẻ được 2 tiếp tuyến NP, NQ đến (C_m) sao cho ΔNPQ đều

Câu II. 1. Giải bất phương trình: $(2^x + 5 \cdot 2^{-x})^{2 \log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$

2. Giải phương trình: $2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$

2. Cho ΔABC có: $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos A \cos B \cos C$

Chứng minh rằng: Tam giác ABC đều

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \cdot \sin x \cdot \cos^3 x \, dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} \, dx$

2. Trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) lấy 2 điểm cố định A, B .

Hai đường thẳng di động $(\Delta_1), (\Delta_2)$ lần lượt đi qua các điểm A, B

và cắt nhau tại điểm M sao cho: $|\angle MAB - \angle MBA| = 90^\circ$.

Tìm quỹ tích điểm M .

Câu V. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có 9 chữ

số trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, chữ số 2 có mặt 2 lần, các chữ số

khác có mặt 1 lần. Tính tổng các số tạo ra.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 3 điểm	Câu V: 1 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1,5 điểm	

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 3

Câu I. 1. Khảo sát và vẽ (C_1) : $y = x^3 - x^2 + 2$. Từ (C_1) vẽ (C_2) : $y = |x^3 - x^2 + 2|$

2. Giả sử đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C_1) tại A, B, C có hoành độ là a, b, c . Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$.

Câu II. 1. Giải phương trình: $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} - 4\sqrt{4x-x^2-3} = -2$

2. Giải phương trình: $\log_{5-x^2} \frac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x \cdot \cos x} = \log_{5-x^2} 2$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

2. Cho ΔABC thỏa mãn: $\cos A = \frac{(a+b)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}$

Chứng minh rằng: Tam giác ABC vuông.

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 5x + 6)^2}$; $J = \int_0^1 \frac{3e^{2x} - 5e^x + 4}{e^x + 1} dx$

2. Cho $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{2+abc}$

Câu V. 1. Viết phương trình đường tròn đi qua $A(1, 3)$ và tiếp xúc với 2 đường thẳng $(\Delta_1): x + 2y + 2 = 0$ $(\Delta_2): 2x - y + 9 = 0$.

2. Cho một hình vuông có đỉnh $A(-3, 7)$ và một đường chéo có phương trình: $4x - 5y + 12 = 0$. Viết phương trình các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 4

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = \frac{x^2 + 2x + m - 1}{x - 1}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C_m) khi $m = -1$

2. Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và gốc toạ độ O lập thành 1 tam giác vuông tại O

Câu II. 1. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{x+5}{3}} \left(\log_2 \frac{2x-1}{x+3} \right) < 0$

2. Giải phương trình: $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\operatorname{tg} x + \cotg x + 7 = \cotg^2 2x$

2. Cho phương trình: $\sin^3 x - \cos^3 x = m$. Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0, \pi]$

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^1 \frac{x \cdot dx}{x^4 + 7x^2 + 10}$; $J = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \cdot \sin^{2003} x \cdot dx$

2. Có bao nhiêu số tự nhiên có đúng 2004 chữ số mà tổng các chữ số bằng 5

Câu V. Cho họ (C_m) : $x^2 + y^2 - 2(2m + 1)x - 2(m + 2)y + 8m + 5 = 0$

1. Chứng minh rằng: Họ đường tròn (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại 1 điểm cố định $\forall m$. Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) .

2. Tìm trong họ (C_m) các đường tròn sao cho từ $A(2, 0)$ kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc nhau đến các đường tròn này.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 5

Câu I. Cho họ $(C_m): y = x^3 - 2mx^2 + (2m^2 - 1)x - m(m^2 - 1)$

1. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 với $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

2. Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Câu II. 1. Giải phương trình: $(x-3)[\log_3(x-5) + \log_5(x-3)] = x+2$

2. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$

3. Cho $x^2 + 2y^2 = 3$. Tìm Max, Min của $S = |x| + \sqrt{y^2 + 1}$

Câu III. 1. Cho phương trình: $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x - 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có đúng 8 nghiệm phân biệt $\in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$

2. Cho ΔABC có: $r + r_a = 4R \cos C$. Chứng minh rằng: ΔABC cân.

Câu IV. 1. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x(1 + \sin^2 x)^5 dx$

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P): $y = 4x - x^2$ với các đường tiếp tuyến của (P) đi qua điểm $A\left(\frac{5}{2}, 6\right)$

Câu V. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 elip có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1; \quad (E_2): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

1. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của (E_1) với (E_2)

2. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của $(E_1), (E_2)$

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2,5 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 1,5 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm	1. 0,5 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm
	3. 0,5 điểm			

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 6

Câu I. 1. Cho đồ thị (C): $y = \frac{x+3}{x^2+5}$. Chứng minh rằng: (C) luôn có 3 điểm uốn thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm uốn.

2. Tính giới hạn: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x}}{\sin^2 4x}$

Câu II. 1. Giải phương trình: $2(x-2) \left[\sqrt[3]{4x-4} + \sqrt{2x-2} \right] = 3x-1$

2. Giải phương trình: $2^{\log_5(x+3)} = x$

Câu III. 1. Cho phương trình: $1 + \cos^2 \left(\frac{mx}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) = \left(\frac{1}{3} \right)^{|\sin \pi x - \cos \pi x|}$

Tìm $m \in (5, 16)$ để phương trình có ít nhất 1 nghiệm $x \in (0, 2)$

2. Cho ΔABC có $2\cos A + \cos B + \cos C = \frac{9}{4}$. Chứng minh: ΔABC cân.

Câu IV. 1. Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos 5x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

2. Cho ΔABC . Xét tập hợp gồm 5 đường thẳng // AB; 6 đường thẳng // BC; 7 đường thẳng // CA. Hỏi các đường thẳng này tạo ra bao nhiêu hình bình hành; bao nhiêu hình thang.

Câu V. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) có $A_1(-a, 0)$; $A_2(a, 0)$;

$B_1(0, -b)$; $B_2(0, b)$. Lấy điểm $M \in (E)$ không trùng với A_1, A_2, B_1, B_2 .

Chứng minh rằng: Dây cung chung của 2 đường tròn ngoại tiếp

ΔMA_1A_2 , ΔMB_1B_2 tiếp xúc với (E).

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm	
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm	

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 7

Câu I. (C_m): $y = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}(2m^2 + 2m - 1)x^2 + (m^2 + m)x + 1$

1. Với $m = -1$: Khảo sát và vẽ đồ thị (C_{-1})

Viết PT tiếp tuyến tiếp xúc với (C_{-1}) tại 2 điểm phân biệt

2. Tìm m để (C_m) chỉ có cực tiểu mà không có cực đại

Câu II. 1. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{2x-1} - 2x - 8 = 0$

2. Giải phương trình: $3^{\log_2 x} - 3^{\log_4(2x^2 - 5x + 4)} = \log_4 \left(\frac{2x^2 - 5x + 4}{x^2} \right)$

Câu III. 1. Cho ΔABC có: $\frac{-\sin A + \cos B + \cos C}{\cos A + \sin B + \sin C} = \sqrt{3}$

Chứng minh rằng: ΔABC luôn có góc $A = 120^\circ$

2. Cho $y = \frac{(1-m)\cos x + 1 - \sin x}{m \sin x - 1}$. Tìm m để $\text{Max}^3 y + \text{Min}^3 y = \frac{10}{27}$

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\cos 3x} dx$; $J = \int_1^4 \frac{\sqrt{2x+1} \cdot dx}{2x+3+3\sqrt{2x+1}}$

2. Cho elip (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm $M(1, 1)$. Lập phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (E) tại P, Q sao cho $MP = MQ$.

Câu V. 1. Một đội văn nghệ có 14 người gồm 7 nam và 7 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 người trong đó có ít nhất 2 nam và 1 nữ.

2. Cho $a, b, c \in [0, 1]$ và $a + b + c = \frac{3}{2}$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{5}{4}$

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2,5 điểm	Câu V: 1,5 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1,5 điểm	2. 0,5 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 8

Câu I. 1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C): $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$

2. Tìm trên Oy các điểm kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) vuông góc nhau.

Câu II. 1. Giải phương trình: $\log_3 \log_4 \left(\frac{3x-1}{x+1} \right) \leq \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{x+1}{3x-1} \right)$

2. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x-5} + \sqrt[3]{5x-7} + \sqrt[4]{x+13} + \sqrt[5]{7x+11} > 8$

Câu III. 1. Tìm nghiệm $x < \frac{\pi}{2}$ của phương trình sau:

$$\sin\left(\frac{30x+21}{6x-1}\right) + \sin\left(\frac{10x+7}{6x-1}\right) - 2\cos^2\left(\frac{10x+7}{6x-1}\right) = 0$$

2. Cho ΔABC có: $(r_b - r_a)(r_c - r_a) = 2r_b r_c$. CMR: ΔABC vuông.

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^1 x^5 (1-x^3)^7 dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x) dx$

2. Tính diện tích $S = \{y = 8 - 3x - 2x^2; y = 2 + 9x - 2x^2; y = x + 10\}$

Câu V. 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 điểm $A(-1, 7)$; $B(4, -3)$; $C(-4, 1)$.

Viết phương trình đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của ΔABC .

2. Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số phân biệt trong đó 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn đồng thời chữ số đầu tiên phải khác 0.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 9

Câu I. Cho $(C): y = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 2}$ và $M \in (C)$. Gọi I là giao của 2 tiệm cận.

Tiếp tuyến tại M cắt 2 tiệm cận của (C) tại A, B .

1. CMR: M là trung điểm AB và diện tích ΔIAB không đổi

2. Tìm $M \in (C)$ để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

Câu II. 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$(4m - 3)\sqrt{x + 3} + (3m - 4)\sqrt{1 - x} + m - 1 = 0$$

2. Tìm m để bất phương trình sau đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{-4x^2 + 10x - 7}{(m - 1)2^{\cos^2 x} + 2^{1 + \sin^2 x} + 2m} < 0$$

Câu III. 1. Giải biện luận: $\sqrt{2} \cos x (m^2 + 1 - m\sqrt{2}) + (m - 1)^2 + \frac{2 \cos x + 2}{1 + \sqrt{2} \cos x} = 0$

2. Tìm các góc của ΔABC nếu ΔABC thỏa mãn điều kiện:

$$2 \cos A \sin B \sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{(x - 1)^2 - 2 \sin^2 x + 2x}{2000^x \cdot e^{3x} + 1} \cdot dx$

2. Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm $A(-2; 0) \in (E)$. Lấy điểm $M \in (E)$

Kẻ $MH \perp Oy$, $AH \cap OM = P$. Tìm quỹ tích của điểm P .

Câu V. Cho $P(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + 3(1 + x)^3 + \dots + 30(1 + x)^{30}$.

Giả sử khai triển $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{30}x^{30}$. Tìm a_{26} .

Thang điểm

Câu I: 2,5 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2,5 điểm	Câu V: 1 điểm
1. 1,5 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 10

Câu I. 1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C): $y = \frac{-x^2 - 4x + 3}{|x + 6|}$

2. Cho $m > 0$. Biện luận số nghiệm của phương trình :

$$x^2 + 4x + |x + 6| \cdot \log_{\frac{1}{2}} m - 3 = 0$$

Câu II. 1. Giải phương trình: $\frac{x^2}{\sqrt{5x+4}} + \sqrt{5x+4} = \frac{4x}{3} + 2$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y \end{cases}$$

Câu III. 1. Xét phương trình: $\sin \frac{2x+1}{x} + \sin \frac{2x+1}{3x} - 3 \cos^2 \frac{2x+1}{3x} = 0$

Tìm tổng nghịch đảo các nghiệm x_i của phương trình với $x_i > \frac{1}{10}$

2. Cho ΔABC có $m_a = \sqrt{p(p-a)}$. CMR: ΔABC cân.

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} dx$; $J = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$

2. Cho 4 điểm $A(5, 1, 3)$; $B(1, 6, 2)$; $C(5, 0, 4)$; $D(4, 0, 6)$

Chứng minh: Hai đường thẳng (AB), (CD) chéo nhau. Tính khoảng cách của (AB), (CD) và viết phương trình đường vuông góc chung.

Câu V. 1. Chứng minh rằng: $1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

2. Cho $x, y, z > 0$ và $xyz = 32$. Tìm Min của $S = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$

Thang điểm

Câu I: 1,5 điểm Câu II: 2 điểm Câu III: 2 điểm Câu IV: 2,5 điểm Câu V: 2 điểm

1. 1 điểm 1. 1 điểm 1. 1,5 điểm 1. 1 điểm 1. 1 điểm

2. 0,5 điểm 2. 1 điểm 2. 0,5 điểm 2. 1,5 điểm 2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 11

Câu I. Cho $(C_m): y = \frac{x^2 - (m+1)x + 4m^2 - 4m - 2}{x - (m-1)}$

1. Tìm m để (C_m) có cực trị $\in (I)$; 1 cực trị $\in (III)$
2. Tìm m để hàm số đồng biến trong khoảng $(0, +\infty)$

Câu II. 1. Giải bất phương trình:

$$12x + \sqrt{3x^4 + 4x^5 - 4x^6} \cdot \log_2 x^2 > 3\sqrt{3 + 4x - 4x^2} + 4x^3 \cdot \log_4 x^4$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 3x + 3\sqrt{x+1} = y + 5 \\ y^3 + 3y + 3\sqrt{y+1} = z + 5 \\ z^3 + 3z + 3\sqrt{z+1} = x + 5 \end{cases}$$

Câu III. 1. Tìm m để 2 phương trình sau tương đương

$$2\sin^7 x + (m-1)\sin^3 x + (2m^3 - 2m - 1)\sin x = 0$$

$$2\sin^6 x + (2-m)\cos^2 x + 2m^3 - 2m - 2 = 0$$

2. Cho ΔABC có: $\frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c} = \frac{abc}{r}$. Chứng minh: ΔABC đều.

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^{a\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2} \sqrt{(a^2 + x^2)^3}}; J = \int_{\pi/9}^{\pi/12} \frac{dx}{\lg x \lg\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \lg\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}$

2. Viết phương trình các cạnh ΔABC biết tọa độ chân của 3 đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C là $A'(-1, -2); B'(2, 2); C'(-1, 2)$

Câu V. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \leq \frac{3}{2abc}, \forall a, b, c \in (0, 1]$

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2,5 điểm	Câu IV: 2,5 điểm	Câu V: 1 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1,5 điểm	
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 12

Câu I. 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + 3}$.

2. Tìm $M \in (C)$ để tổng khoảng cách từ M đến Ox, Oy nhỏ nhất

Câu II. 1. Giải bất phương trình: $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geq 1$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 2 \cdot 4^{8y^2} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x+y} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Câu III. 1. Xét phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 3x - m \cos^2 2x = 0$

a. Giải phương trình khi $m = 3$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm

2. Cho ΔABC có $h_a = 2\sqrt{2} \cdot p \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$. CMR: ΔABC vuông.

Câu IV. 1. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \sin^4 2x \cdot \cos^5 x \, dx$; $J = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \, dx$

2. Trên mặt phẳng Oxy cho $(C): (x-3)^2 + (y-5)^2 = 1$

Tính thể tích V_x khi hình tròn (C) quay quanh trục Ox

Câu V. 1. Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng

Oxy kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc nhau đến (E)

2. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a-bc)(b-ca)(c-ab) \leq 8a^2b^2c^2$$

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 13

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị với $m = 1$

2. Tìm m để hàm số có $y_{CD} \cdot y_{CT}$ nhỏ nhất

Câu II. 1. Giải PT: $\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = \sqrt{\log_2 x}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24 \end{cases}$$

Câu III. 1. Cho ΔABC thỏa mãn: $\frac{\cos B}{\cos C} + \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{a^2}{bc}$. CMR: ΔABC vuông.

2. Cho phương trình: $4m(\sin^6 x + \cos^6 x - 1) = 3\sin 6x$

a. Giải phương trình khi $m = -4$

b. Tìm m để phương trình có 3 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Câu IV. 1. Tính $I = \int_0^1 e^{2x} (1+x)^3 dx$; $J = \int_0^2 (x-2) \sqrt{\frac{x+4}{4-x}} dx$

2. Cho $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z \leq 0$. Tìm Max, Min của $S = 2x + 3y - 2z$

Câu V. Cho họ mặt phẳng (P_m) : $2mx + (3m-1)y + (m+2)z - 5m + 2 = 0$

1. Chứng minh rằng: (P_m) luôn đi qua đường thẳng cố định (d)

2. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua gốc tọa độ và $\perp$ với (d)

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 14

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị khi $m = 1$.
2. CMR trên mặt phẳng Oxy có 1 điểm vừa là CĐ vừa là CT.

Câu II. 1. Tìm m để phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ có nghiệm

2. Giải bất phương trình: $3^{2\log_2(x^3+3x+4)} - 8(x^3+3x+4)^{\log_2 3} < 9$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\cos x(1 - \tan x)(\sin x + \cos x) = \sin x$

2. Cho ΔABC có: $\frac{2p-a}{2p+a} + \frac{2p-b}{2p+b} + \frac{2p-c}{2p+c} = \frac{3}{2}$. CMR: ΔABC đều.

Câu IV. 1. Tính $I = \int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2} dx$; $J = \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$

2. Tính: $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n$

Câu V. Cho đường thẳng (d) : $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và (P) : $x + 2y - z + 5 = 0$

1. Tìm $M = (d) \cap (P)$
2. Tính góc $\alpha = ((d), (P))$
3. Viết phương trình hình chiếu của (d) lên (P)
4. Viết phương trình đường thẳng (Δ) nằm trên (P) đi qua giao điểm M của (d) với (P) và vuông góc với (d)

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1, 2. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	3, 4. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 15

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = \frac{x^2 + (m+1)x + 2m - 6}{x + 2m}$

1. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu cùng dấu
2. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu nằm về 2 phía $y = -x$

Câu II. 1. Cho phương trình: $x^2 + (m-3)x - 2m - 2 = 0$ với $m \leq -4$

Tìm m để nghiệm bé của phương trình nhận giá trị nhỏ nhất

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y \log_2 x = 3^{y+1} + 2\log_2 x \end{cases}$$

Câu III. 1. Giải phương trình: $3\lg 3x - 4\lg 2x = \lg^2 2x \cdot \lg 3x$

2. Cho ΔABC có: $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a+c}{2c}}$. Chứng minh rằng: ΔABC vuông.

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$; $J = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \cdot \cos 2x \cdot dx$

2. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc \quad \forall a, b, c \in [1, 2]$

Câu V. 1. Cho (d) : $\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$ và $A(2, 1, 5), B(4, 3, 9)$

Tìm $I \in (d)$ để $(IA + IB)$ nhỏ nhất

2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 thành lập tất cả các số có 7 chữ số phân biệt. Hỏi trong các số này có bao nhiêu số mà 2 chữ số 1 và 4 không đứng cạnh nhau.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1,5 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 0,5 điểm

Câu I. Cho họ (C_m) : $y = \frac{1}{3}(m+1)x^3 - (m-1)^2 + 4x + m^2 - m + 1$

1. Tìm m để hàm số đồng biến trong khoảng $(-1, 2)$

2. Tìm $A \in (C_m)$ để tiếp tuyến tại đó có phương không đổi $\forall m$

Câu II. 1. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{24-x^2-2x}{14} \right) > 1$

2. Tìm m để PT: $|1 - mx| = mx^2 + (1 - 2m)x + 1$ có nghiệm duy nhất.

Câu III. 1. Giải phương trình: $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \cdot \sin 4x = 2$

2. Cho ΔABC có: $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = 1$. CMR: ΔABC vuông hoặc cân.

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$; $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos x}$

2. Cho $x, y, z, t \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \log_x \left(y - \frac{1}{4}\right) + \log_y \left(z - \frac{1}{4}\right) + \log_z \left(t - \frac{1}{4}\right) + \log_t \left(x - \frac{1}{4}\right)$$

Câu V. Cho $A(2, -1, 2)$; $B(-1, -2, 8)$; $C(4, -4, 3)$; $D(0, -5, 8)$

1. Tính thể tích tứ diện ABCD.

2. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp ABCD và tìm tâm, bán kính.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm Câu II: 2 điểm Câu III: 2 điểm Câu IV: 2 điểm Câu V: 2 điểm

1. 1 điểm 1. 1 điểm 1. 1 điểm 1. 1,5 điểm 1. 1 điểm

2. 1 điểm 2. 1 điểm 2. 1 điểm 2. 0,5 điểm 2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 17

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = x^3 + 3x^2 - 6mx + 4m$

1. Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt và nhỏ hơn 2

2. Tìm m để (C_m) cắt Ox tại đúng 1 điểm

Câu II. 1. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{2x-1} - 2x - 8 = 0$

2. Giải phương trình: $4^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} = 3$

Câu III. 1. Cho ΔABC diện tích S . CMR: $S = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3(\cotg A + \cotg B + \cotg C)}$

2. Cho ΔABC vuông tại A và 2 trung tuyến BB' , CC' .

Chứng minh rằng: $\cos$ in của góc nhọn tạo bởi (BB') , (CC') $> \frac{4}{5}$

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cdot \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$; $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1 + \sqrt[3]{x^4 + 1}} dx$

2. Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{(1+a)^3} + \frac{b^3}{(1+b)^3} + \frac{c^3}{(1+c)^3} \geq abc \left[\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+b)^3} + \frac{1}{(1+c)^3} \right]$$

Câu V. Cho (d) : $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + 3z + 13 = 0 \end{cases}$; (α) : $3x - 2y + 3z + 16 = 0$

1. Tìm giao điểm $H = (d) \cap (\alpha)$

2. Viết phương trình đường (Δ) đi qua (H) ; $(\Delta) \subset (\alpha)$ và $(\Delta) \perp (d)$

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 18

Câu I. Cho $y = \frac{x^2 + (2m-1)x - 2m + 3}{2x - m}$

1. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu cùng dấu.
2. Với $m = 3$, tìm trên mỗi nhánh của đồ thị 1 điểm để khoảng cách giữa chúng là nhỏ nhất.

Câu II. 1. Giải phương trình: $(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = 2x$

2. Giải bất phương trình: $\frac{1}{2} \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 - \sin^3 x - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

2. Cho ΔABC có: $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2 \sin A \\ \lg B + \lg C = 2 \lg A \end{cases}$. Chứng minh: ΔABC đều.

Câu IV. 1. Tính $I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-x^2}}$; $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin x} dx$

2. Cho $a, b, c \in (0, 1)$ và $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng:

$$T = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-c} + \frac{c}{1-a} \geq 6$$

Câu V. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$

1. Viết phương trình hình chiếu của (d) lên (P) .
2. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua (d) và $A(1, 0, -2)$.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 19

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = \frac{mx^2 + 2mx + m + 1}{x - 1}$

1. Tìm m để (C_m) có CD, CT thuộc góc (I), (III) của Oxy
2. Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt và tiếp tuyến tại 2 điểm đó vuông góc với nhau

Câu II. 1. Giải phương trình: $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Câu III. 1. Chứng minh rằng: $\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{4}$

2. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}}$; $J = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x) \cdot \ln(1 + \tan x) dx$

2. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{2}{\sqrt{3abc}}$$

Câu V. Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có 2 tiêu điểm F_1, F_2 . Lấy $M \in (H)$. Tiếp tuyến tại

M cắt trục ảo của (H) tại P. Gọi Q_1, Q_2 là hình chiếu của P lên MF_1, MF_2 .

1. Chứng minh rằng: $Q_1F_1 = Q_2F_2$.
2. Chứng minh rằng: Q_1Q_2 luôn đi qua 1 điểm cố định.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 20

Câu I. Cho $(C_m): y = x^3 - 9(1-m)x^2 + 27m^2x + 27m^3$

1. Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.
2. Giả sử (C_m) cắt Ox tại 3 điểm x_1, x_2, x_3 . Tìm $\text{Max}(x_1 + x_2 + x_3)$

Câu II. 1. Tìm m để PT: $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$ có nghiệm.

2. Giải phương trình: $3 + \frac{1}{\log_{32} \frac{x}{2}} = \log_{\frac{x}{2}} \left(\frac{75x}{4} - \frac{11}{x} \right)$

Câu III. 1. Giải phương trình: $4\cos^4 x = \cos 2x + 2\cos^2 x \cos 8x$

2. Cho ΔABC có: $\sin(B-A)\sin C + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$

Chứng minh rằng: ΔABC vuông.

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$; $J = \int_{-1/2}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt{-x^2 - x}}$

2. Cho hai đường thẳng $(d_1) \parallel (d_2)$. Trên (d_1) lấy 23 điểm phân biệt và trên (d_2) lấy 27 điểm phân biệt. Tìm số tam giác có 3 đỉnh lấy từ 50 điểm đã cho trên $(d_1), (d_2)$.

Câu V. Cho đường tròn $(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0 \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

1. Tìm tọa độ tâm và bán kính của (C) .
2. Viết phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) và có tâm thuộc mặt phẳng $x + y + z + 3 = 0$.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 21

Câu I. Cho $(C_m): y = x^3 + 6mx^2 + 2m(m+2)x - 4m^2$

1. Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt cách đều nhau
2. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1, +\infty)$

Câu II. 1. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$

2. Cho $ad - bc = 1$. CMR: $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq \sqrt{3}$

Câu III. 1. Giải phương trình: $3\sqrt{tgx+1}(\sin x + 2\cos x) = 5(\sin x + 3\cos x)$

2. Cho tam giác ABC có: $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 + 4r^2$

Chứng minh rằng: Tam giác ABC là tam giác đều.

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^1 (1+x)^2 \cdot e^{2x} dx$; $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1 + \cos x} dx$

2. Cho $a + b + c = 12$. CMR: $\sqrt{a^2 + 8} + \sqrt{b^2 + 8} + \sqrt{c^2 + 8} \geq 6\sqrt{6}$.

Câu V. Cho ΔABC có $A(1, 2, 5)$ và 2 đường trung tuyến

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1} ; \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1}$$

1. Viết phương trình chính tắc các cạnh của ΔABC .
2. Viết phương trình chính tắc của đường phân giác trong của góc A.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm Câu II: 2 điểm Câu III: 2 điểm Câu IV: 2 điểm Câu V: 2 điểm

1. 1 điểm 1. 1 điểm 1. 1 điểm 1. 1,5 điểm 1. 1 điểm

2. 1 điểm 2. 1 điểm 2. 1 điểm 2. 0,5 điểm 2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 22

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2 - x(x+2)} - 1 + 1 \quad (m > 0)$

1. Tìm m để $\text{Max } y = 2$. Khảo sát và vẽ (C_m) với m vừa tìm được.
2. Tìm điểm C trên đồ thị ở câu 1. sao cho ΔABC có diện tích nhỏ nhất trong đó $A(0, 4)$ và $B(-5, 0)$.

Câu II. 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz - zx = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$

2. Giải bất phương trình: $\frac{9}{3x+2} > \frac{1 + \log_3(x+6)}{x}$

Câu III. 1. Giải phương trình:

$$\frac{\tan^2 x \sin^2 x}{1 - \sin^2 x \cos 2x} + \frac{\cot^2 x \cos^2 x}{1 - \cos^2 x \cos 2x} + \frac{2 \sin^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x} = \frac{3}{2}$$

2. Cho ΔABC có: $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cotg \frac{A}{2} \cotg \frac{C}{2}$

Chứng minh rằng: ΔABC cân

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$; $J = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos x} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$

2. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc \leq 2(a + b + c)$$

Câu V. Cho (d_1) : $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$; (d_2) : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$

1. Tính khoảng cách (d_1) , (d_2) và viết phương trình đường vuông góc chung.
2. Tìm A đối xứng $B(3, -3, 2)$ qua (d_1)

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 23

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m): $y = \frac{4(m+1)x^2 - 4mx - (m^3 - m^2 + 2)}{2x - m}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị với $m = -2$

2. CMR: Tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với một Parabol cố định

Câu II. 1. Giải phương trình: $x^2 + 4x = \sqrt{x+6}$

2. Tìm m để BPT: $x + 2(m+2)\sqrt{x-2} - m^2 + m \geq 0$ đúng $\forall x \geq 2$

Câu III. 1. Giải phương trình: $2\sin 3x + \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$

2. Cho ΔABC có
$$\begin{cases} a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 4ab \cos A \cos B \\ \sin 2A + \sin 2B = 4 \sin A \sin B \end{cases}$$

Chứng minh rằng: ΔABC vuông cân

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x - nx) dx$; $J = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x \ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$

2. Cho $S = \left\{ y = \sqrt{\cos^2 x + x \sin x}; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{2} \right\}$

Tìm thể tích V_x khi S quay quanh Ox

Câu V. Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Đường thẳng (Δ) di động nhưng có phương cố định và cắt (H) tại M; cắt 2 đường tiệm cận tại A, B.

Chứng minh rằng: MA. MB không đổi

Thang điểm

Câu I: 2 điểm Câu II: 2 điểm Câu III: 2 điểm Câu IV: 2 điểm Câu V: 2 điểm

1. 1 điểm

1. 1 điểm

1. 1 điểm

1. 1,5 điểm

2. 1 điểm

2. 1 điểm

2. 1 điểm

2. 0,5 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 24

Câu I. Cho $(C_m): y = \frac{mx^2 + (2 - m^2)x - (2m + 1)}{x - m}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C_{-1}) , từ đó suy ra đồ thị $y = \left| \frac{-x^2 - x + 1}{-x + 1} \right|$
2. Tìm m để (C_m) có cực trị. CMR: Với m tìm được thì trên (C_m) luôn tìm được 2 điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc nhau.

Câu II. 1. Giải BPT: $(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} (\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1) \leq 0$

2. Giải hệ:
$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

Câu III. 1. Giải phương trình: $2 \operatorname{tg} 6x + 4 \operatorname{tg} 12x + 8 \operatorname{cotg} 24x + \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 2x$

2. CMR tam giác ABC vuông cân nếu thỏa mãn đẳng thức sau:

$$2\sin^4 A + 2\sin^4 B + \sin^4 C = 2\sin^2 C (\sin^2 A + \sin^2 B)$$

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$; $J = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$

2. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^4 + b^4}{1 + ab}} + \sqrt{\frac{b^4 + c^4}{1 + bc}} + \sqrt{\frac{c^4 + a^4}{1 + ca}} \geq 3$$

Câu V. Trên mặt phẳng tọa độ cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hai đường thẳng $(D_1): mx - ny = 0$; $(D_2): nx + my = 0$ ($m^2 + n^2 > 0$)

1. Tìm tọa độ các giao điểm M, P của (D_1) với (E) và các giao điểm N, Q của (D_2) với (E) theo m, n .

2. Tìm điều kiện của m, n để diện tích tứ giác MNPQ đạt Max, Min.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm Câu II: 2 điểm Câu III: 2 điểm Câu IV: 2 điểm Câu V: 2 điểm

1. 1 điểm 1. 1 điểm 1. 1 điểm 1. 1,5 điểm 1. 1 điểm

2. 1 điểm 2. 1 điểm 2. 1 điểm 2. 0,5 điểm 2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 25

Câu I. Cho đồ thị (C): $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

1. Tìm $M \in (C)$ để tổng các khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.
2. Viết phương trình 2 đường thẳng $(d_1), (d_2)$ đi qua giao điểm I của 2 tiệm cận sao cho có hệ số góc nguyên và cắt (C) tại 4 điểm phân biệt là các đỉnh của một hình chữ nhật.

Câu II. 1. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm (x, y) với mọi $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (a-1)x^7 + y^7 = 1 \\ e^{bx} + (a+1)by^4 = a^2 \end{cases}$$

2. Giải bất phương trình:

$$5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5\sqrt{6 + x - x^2} + 5$$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} = 2$

2. Cho tam giác ABC có: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{3}$

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{9R^2}$

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$; $J = \int_0^1 x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$

2. Cho $x, y > 0$ và $xy = 1$. Tìm Min của $S = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$

Câu V. Trong hệ toạ độ Oxyz cho $A(1, 1, 1)$; $B(3, 3, 1)$; $C(3, 1, 3)$; $D(1, 3, 3)$.

1. CMR: ABCD là tứ diện đều. Viết phương trình mặt cầu nội tiếp tứ diện.
2. Gọi P, Q là trung điểm của AC, BD. Tính: $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{CD} - 4\overline{PQ}$

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 26

Câu I. Cho đồ thị (C): $y = \frac{2x^2 - x - 1}{x + 3}$

1. Chứng minh rằng: (C) có 2 trục đối xứng
2. Viết phương trình (C_1) , (C_2) , (C_3) lần lượt đối xứng (C) qua điểm $A(4, 2)$; qua đường thẳng $y = -1$ và qua đường thẳng $x = 2$

Câu II. 1. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x(6-x)} \geq x^2 - 6x + m + 2$

có độ dài miền nghiệm P thỏa mãn: $2 \leq P \leq 4$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases}$$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 \cos^2 2x}{\operatorname{tg} x - \cotg x}$

2. Gọi α, β, γ là các góc mà tâm I của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ nhìn xuống 3 cạnh BC, CA, AB . Giả sử $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Chứng minh rằng: Tam giác ABC đều.

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$; $J = \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 dx$

2. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. CMR: $a + b + c \leq 2abc + \sqrt{2}$

Câu V. Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có 2 tiêu điểm F_1, F_2 . Lấy M bất kì nằm

ngoài (H) sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MT_1, MT_2 đến (H).

Gọi F_1', F_2' là các điểm đối xứng với F_1, F_2 qua MT_1, MT_2 .

1. CMR: $(T_1, F_1', F_2); (T_2, F_2', F_1)$ thẳng hàng và $\angle F_1 MT_1 = \angle F_2 MT_2$
2. Gọi P_1, P_2 là hình chiếu của F_2 lên MT_1, MT_2 . CMR: $P_1 P_2 \perp MF_1$

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 27

Câu I. 1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C): $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

2. Từ 1 điểm bất kì trên đường thẳng $x = 2$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Câu II. 1. Giải phương trình: $\log_{x-1}(x+2) = \log_{4-2\sqrt{3}}(7+4\sqrt{3})$

2. Cho $a, b, c > 0$ và $a = b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + 4\log_a 2 + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{a}} b - 2\log_{\frac{1}{a}} \sqrt{c}}{\log_a (b+c)} \geq 1$$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$

2. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM thỏa mãn: $AM = AB$.

Chứng minh rằng: $\operatorname{tg} B = 3 \operatorname{tg} C$ và $\sin A = 2 \sin(B - C)$

Câu IV. 1. Tính: $I = \int_2^3 \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx$; $J = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{1+2004^x} dx$

2. Cho $x = \frac{a-b}{1+ab}$; $y = \frac{b-c}{1+bc}$; $z = \frac{c-a}{1+ca}$. CMR: $x + y + z = xyz$

Câu V. Cho (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Một góc vuông uOv quay quanh O có Ou, Ov lần lượt cắt (E) tại M, N. Đặt góc tạo bởi $(Ox, Ou) = \alpha \in [0, 2\pi]$

1. Tính OM, ON theo a, b, α và chứng minh $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ không đổi

2. CMR: Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

3. Tìm Max, Min của diện tích tam giác OMN và độ dài MN.

Thang điểm

Câu I: 1,5 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 1,5 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 3 điểm
1. 0,5 điểm	1. 1 điểm	1. 0,5 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm
				3. 1 điểm

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = \frac{2x^2 + (m-4)x - 2m + 1}{x-2}$

1. Tìm m để (C_m) nhận điểm $I(2, 1)$ làm tâm đối xứng.

2. Tìm m để hàm số đồng biến trên $(3, +\infty)$.

Câu II. 1. Giải bất phương trình:

$$12x + \sqrt{3x^4 + 4x^5 - 4x^6} \log_2 x^2 > 3\sqrt{3+4x-4x^3} + 4x^3 \log_4 x^4$$

2. Tìm a để hệ bất phương trình sau vô nghiệm:
$$\begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 < 0 \\ ax^2 + 2x - a < 0 \end{cases}$$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \cotg^2 x \cotg^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$

2. Chứng minh rằng: $4 \sin^2 63^\circ + \frac{15}{4 \sin^2 63^\circ} < 8$

Câu IV. 1. Giải phương trình: $\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$ với $x > \sqrt{2}$

2. Một lớp học có 40 học sinh trong đó có 3 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 6 người đi dự hội nghị sao cho có ít nhất 2 cán bộ lớp.

Câu V. 1. Cho (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có 2 tiêu điểm F_1, F_2 . Chứng minh rằng:

Tiếp tuyến tại điểm M bất kì thuộc (E) là phân giác ngoài của $\widehat{F_1MF_2}$

2. Trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho 2 điểm $F_1(2, 1)$; $F_2(7, 4)$.

Một elip (E) nhận F_1, F_2 làm 2 tiêu điểm và tiếp xúc với Ox tại K .

Tìm tọa độ K .

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 29

Câu I. Cho họ đồ thị (C_m) : $y = \frac{mx^2 - (3m^2 + 2)x + 6m^3 + 5m}{x - 2m}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$
2. Tìm m để hàm số có 1 cực trị thuộc góc (I) và 1 cực trị thuộc góc (III) trên mặt phẳng tọa độ.

Câu II. 1. Giải phương trình: $\frac{3x^2 - 3x + 1}{2x - 1} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{2x - 1}}{x} + \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} e^x - e^{x-y} = y \\ e^y - e^{y-z} = z \\ e^z - e^{z-x} = x \end{cases}$$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cotg x$

2. Cho ΔABC . Chứng minh đẳng thức sau:

$$\cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} = 2(\cotg A + \cotg B + \cotg C) + \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

Câu IV. 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \left| 1 - 2 \sin^2 \frac{3x}{2} \right|; \quad y = 1 + \frac{12x}{\pi}; \quad x = \frac{\pi}{2}$$

2. Từ 7 chữ số 1;2;3;4;5;6;7 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số mà mỗi số đều chia hết cho 9.

Câu V. Trong hệ tọa độ Oxyz cho hình lập phương $(T) = ABCD.A'B'C'D'$ với $A'(0,0,0)$; $B'(a,0,0)$; $D'(0,a,0)$; $A(0,0,a)$ với $a > 0$. Lấy 2 điểm M, N thuộc đoạn BB' và AD sao cho $BM = AM = b$ ($0 < b < a$). Gọi I, J là trung điểm $AB, C'D'$.

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M, N, I và chứng minh $J \in \alpha$
2. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) và (T) . Tìm vị trí của M để thiết diện tạo thành có chu vi nhỏ nhất.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 30

Câu I. Cho (d): $y = 2x + 3m - 5$ và (C): $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

2. Tìm m để trung điểm của đoạn thẳng nối 2 giao điểm của (d) với (C) nằm trên đường tròn có phương trình: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

Câu II. 1. Giải phương trình: $x^2 \cdot \sqrt[4]{2 - x^4} - 1 = x^4 - x^3$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_4 x = \log_3 (5 + \sqrt{y}) \\ \log_4 y = \log_3 (5 + \sqrt{z}) \\ \log_4 z = \log_3 (5 + \sqrt{x}) \end{cases}$$

Câu III. 1. Giải phương trình: $\operatorname{tg} x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$

2. Cho ΔABC có $m_a m_b m_c = pS$. CMR: Tam giác ABC đều

Câu IV. 1. Tìm nghiệm $x \in (0, 3\pi)$ của phương trình: $\int_0^x \cos(t - x^2) dt = \sin x$

2. CMR: $\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} + \frac{4(a+b+c)}{9} \geq \frac{7}{3}, \forall a, b, c > 0$

Câu V. Trong hệ toạ độ Oxyz cho 2 điểm $A(0, 0, -3)$; $B(2, 0, -1)$ và mặt phẳng (P): $3x - 8y + 7z - 1 = 0$

1. Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng (AB) với mặt phẳng (P).

2. Tìm toạ độ điểm $C \in (P)$ sao cho tam giác ABC đều.

Thang điểm

Câu I: 2 điểm	Câu II: 2 điểm	Câu III: 2 điểm	Câu IV: 2 điểm	Câu V: 2 điểm
1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1 điểm	1. 1,5 điểm	1. 1 điểm
2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 1 điểm	2. 0,5 điểm	2. 1 điểm